Oscilaciones

El movimiento oscilatorio es de los más importantes que aparecen en la naturaleza: los átomos en un sólido oscilan alrededor de sus posiciones de equilibrio, el movimiento de un péndulo, los electrones en una antena, etc. Además el conocimiento del movimiento oscilatorio es fundamental para comprender el movimiento ondulatorio.

Movimiento armónico simple

El más simple de los movimientos oscilatorios es el movimiento armónico simple. Una partícula que se mueve a lo largo del eje X posee un movimiento armónico simple si su coordenada viene dada por:

$$x(t) = A\ \sin(\omega t + \alpha) \qquad [A] = L, [\omega] = T^{-1}$$

$\omega t + \alpha \quad \rightarrow$ fase $\qquad \alpha \quad \rightarrow$fase inicial.
El desplazamiento $x(t)$ varía entre $-A$ y $+A$: $-A \leq x(t) \leq A$.
$A \quad \rightarrow$ Amplitud
El seno se repite cada 2π, luego:

$$x(t) = x(t + 2\pi/\omega)$$

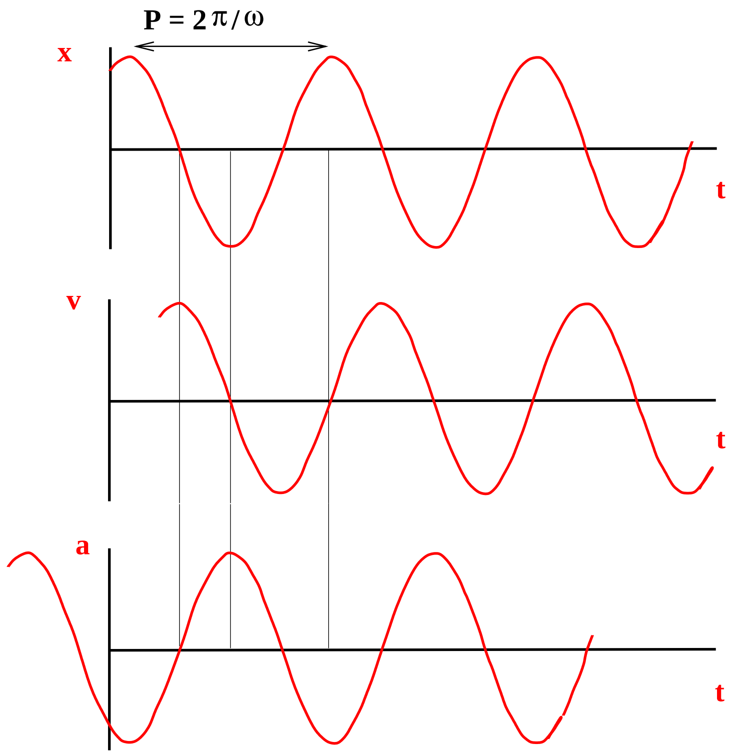
el movimento es periódico.
$P = 2\pi/\omega \quad \rightarrow$ Período
$\nu = 1/P = \omega/(2\pi) \quad \rightarrow$ frecuencia angular: número de oscilaciones por unidad de tiempo.

La velocidad es

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos \omega t + \alpha$$

y la aceleración es:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x$$



La fuerza que actúa sobre una partícula cuyo movimiento es armónico simple es:

$$F = ma = -m\omega^2 x = -kx \qquad k \equiv m\omega^2, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

En el movimiento armónico simple la fuerza es proporcional al desplazamiento y opuesta a él

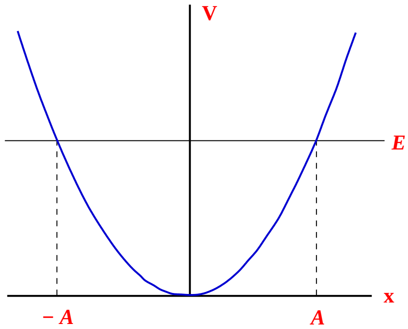
La fuerza siempre está dirigida hacia el *punto de equilibrio*, que es aquel donde $F = 0$: $x = 0$. La constante k se denomina a veces *constante elástica*.

La energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \alpha)$$

y la energía potencial:

$$\frac{dV}{dx} = F = -kx;$$
$$V = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \alpha)$$
$$V = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \alpha)$$



y la energía total:

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

Problema inverso: Sea una partícula de masa m sometida a una fuerza $F = -kx$; la ecuación de movimiento es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \qquad m\frac{d^2x}{dt} + kx = 0, \qquad \frac{d^2x}{dt} + \omega^2 x = 0$$

Esta ecuación es una ecuación diferencial de segundo orden, lineal homogénea. La solución general depende de dos constantes arbitrarias:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \alpha) = A(\sin\omega t\ \cos\alpha + \cos\omega t\ \sin\alpha) = \bar{A}\sin\omega t + \bar{B}\cos\omega t$$

Las constantes son A y α o $\bar{A} = A\cos\alpha$ y $\bar{B} = A\sin\alpha$.

Si las condiciones iniciales son $t = 0$ $x = x_0, v = v_0$ se tiene:

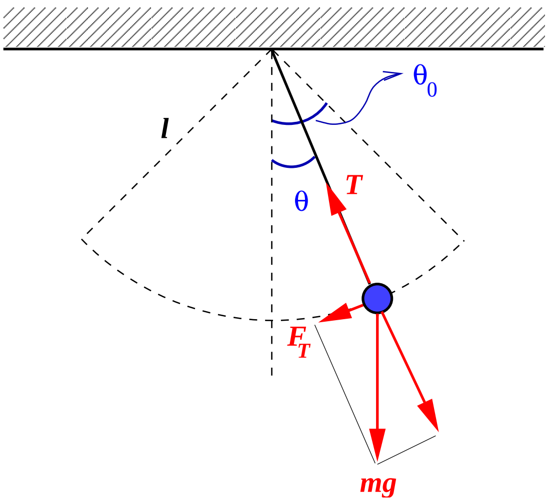
$$x_0 = A\sin\alpha, \quad v_0 = A\omega\cos\alpha$$

que implica:

$$A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} \qquad \tan\alpha = \frac{x_0\omega}{v_0}$$

Ejemplo

♢ Péndulo simple: Una partícula de masa m está suspendida del punto O por una cuerda de longitud l y masa despreciable. Si inicilamente se desplaza un ángulo θ_0 respecto de la vertical, encontrar el movimiento.



La trayectoria es circular de radio l; la fuerza tangencial es $F_T = -mg\sin\theta$. El signo $-$ es debido a que lleva la dirección opuesta al ángulo θ. La aceleración tangencial es:

$$a_T = l\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

y la ecuación de movimiento es:

$$m\,l\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta, \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Esta ecuación no es la ecuación de un movimiento armónico simple. Debido a la conservación de la energía θ varía entre θ_0 y $-\theta_0$, es decir el movimiento es oscilatorio. Si $\theta_0 \sim 0$, también lo será θ y $\sin\theta \sim \theta$ y la ecuación de movimiento se escribe:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Esta vez la ecuación es la de un movimiento armónico simple con $\omega^2 = g/l$. La solución es:

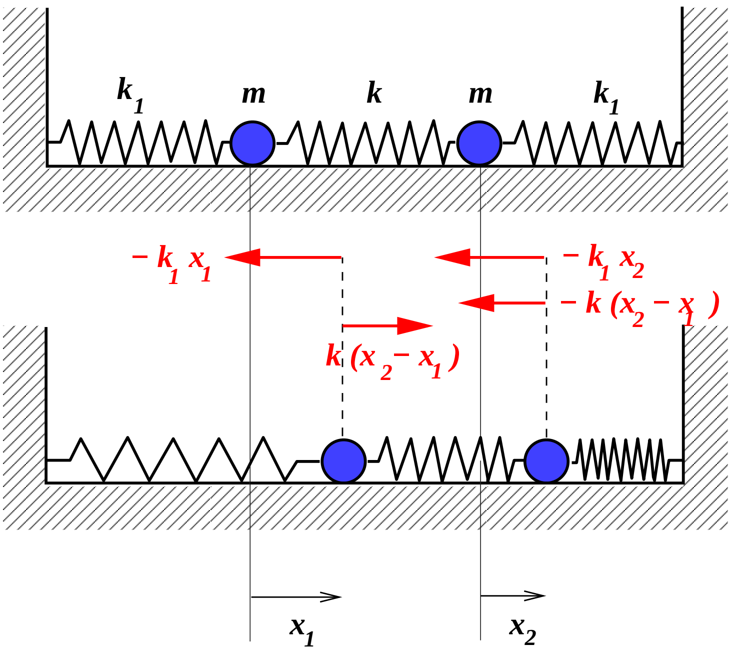
$$\theta(t) = \theta_0 \sin \omega t$$

En general, si θ no es muy pequeño la frecuencia del movimiento y por tanto el período depende de la amplitud θ_0.

Cuestión: ¿Cuanto vale T, la tensión del hilo?

Osciladores acoplados

Sean dos masas iguales unidas por resortes de constante elástica k_1 y k como indica la figura. En la posición de equilibrio los muelles no están ni comprimidos ni estirados.



Las ecuaciones de movimiento son:

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2x_1}{dt^2} &= -k_1\,x_1 + k\,(x_2 - x_1) = -(k_1 + k)\,x_1 + k\,x_2 \\
m\frac{d^2x_2}{dt^2} &= -k_1\,x_2 - k\,(x_2 - x_1) = k\,x_1 - (k_1 + k)\,x_2
\end{aligned}
$$

Estas ecuaciones forman un sistema diferencial acoplado de segundo grado lineal y homogéneo. Para resolverlo sumamos y restamos ambas ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2}{dt^2}\,(x_1 + x_2) &= -k_1\,(x_1 + x_2) \\
m\frac{d^2}{dt^2}(x_1 - x_2) &= -(k_1 + 2k)\,(x_1 - x_2)
\end{aligned}
$$

Estas ecuaciones se escriben como

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}\,(x_1 + x_2) + \omega_1^2\,(x_1 + x_2) &= 0 \\
\frac{d^2}{dt^2}(x_1 - x_2) + \omega_2^2\,(x_1 - x_2) &= 0
\end{aligned}
$$

donde:

$$
\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \qquad\qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_1 + 2k}{m}}
$$

Ahora el sistema de ecuaciones se ha desacoplado: cada ecuación es la ecuación de un movimiento armónico simple:

$$
x_1 + x_2 = A\,\sin(\omega_1 t + \alpha_1) \qquad x_1 - x_2 = B\,\sin(\omega_2 t + \alpha_2)
$$

Finalmente:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{A}{2}\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \frac{B}{2}\sin(\omega_2 t + \alpha_2) = A_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2) \\
x_2 &= \frac{A}{2}\sin(\omega_1 t + \alpha_1) - \frac{B}{2}\sin(\omega_2 t + \alpha_2) = A_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1) - A_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2)
\end{aligned}
$$

Las cuatro constantes A_1, A_2, α_1 y α_2 se determinan mediante las condiciones iniciales $x_1(0)$, $x_2(0)$, $v_1(0)$ y $v_2(0)$. Hay dos movimientos particulares especialmente importantes:

1) Sean unas condiciones iniciales tales que $A_2 = 0$. En este caso el movimiento es:

$$x_1(t) = x_2(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1)$$

El muelle intermedio ni se estira ni se comprime y la frecuencia del movimiento es debida solo a los muelles exteriores.

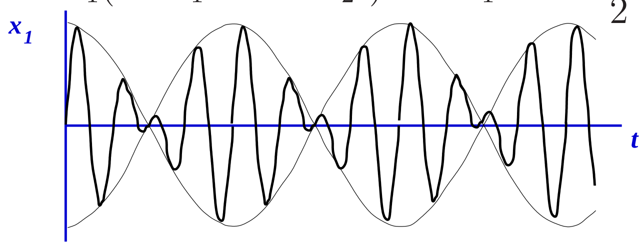
2) Sean una condiciones iniciales tales que $A_1 = 0$. En este caso el movimiento es:

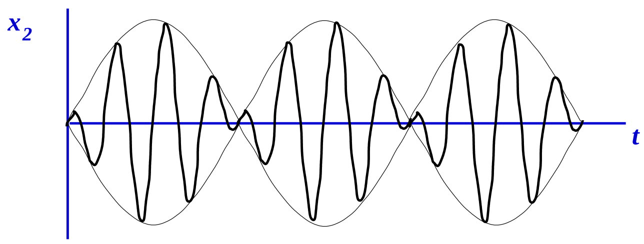
$$x_1(t) = -x_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_1)$$

Ahora los muelles exteriores se estiran y se comprimen al mismo tiempo. La frecuencia depende de las dos constantes elásticas.
Cada uno de estos movimientos se denomina *modo normal de oscilación* y cada uno de ellos es movimiento armónico simple. En general, con unas condiciones iniciales arbitrarias, el movimiento es una combinación de ambos modos normales.

Otro movimiento interesante es aquel en el cual $A_1 = A_2$ y $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1(\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t) = 2A_1 \cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t \,\sin\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t \\ x_1 &= A_1(\sin\omega_1 t - \sin\omega_2 t) = 2A_1 \sin\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t \,\cos\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t \end{aligned}$$





Hay un intercambio de energía entre los dos movimientos.

En general la energía es:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_1x_2^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}k_1x_1^2}_{1^0 \text{ oscilador}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}k_1x_2^2}_{2^0\text{oscilador}} + \underbrace{\frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2}_{\text{e. de acoplamiento}} \end{aligned}$$

Oscilador amortiguado

Sea un oscilador armónico con constante elástica k, masa m y sometido a una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x - \lambda\,\frac{dx}{dt}$$

donde λ es una constante. Esta ecuación se escribe como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\,\frac{dx}{dt} + \omega_0^2\,x = 0$$

donde

$$\gamma = \frac{\lambda}{2m} \qquad\qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Si x_1 y x_2 son soluciones de la ecuación anterior, $ax_1 + bx_2$ también lo es, siendo a y b constantes arbitrarias. Supongamos una solución de la forma $x = e^{rt}$, sustituyendo en la ecuación de movimiento:

$$(r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2)\,e^{rt} = 0$$

que da las siguientes soluciones para r:

$$r = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Hay tres casos:

1).- $\boxed{\omega_0^2 > \gamma^2}$ Las dos soluciones para r son complejas:

$$r = -\gamma \pm i\,\omega \qquad\qquad \omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

La solución es

$$x(t) = C_1\, e^{-\gamma t}\, e^{i\omega t} + C_2\, e^{-\gamma t}\, e^{-i\omega t} = e^{-\gamma t}(C_1\, e^{i\omega t} + C_1\, e^{-i\omega t})$$

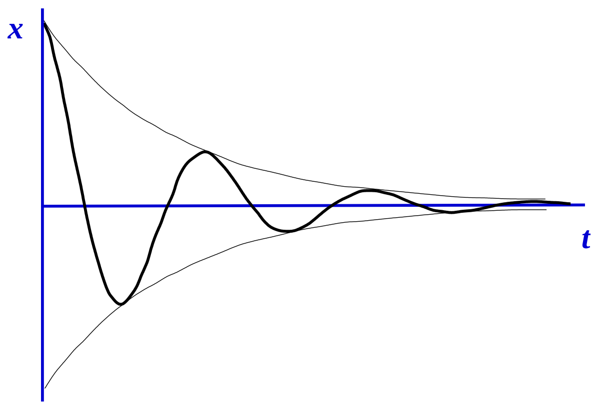
donde C_1 y C_2 son dos constantes complejas conjugadas (para que x sea real). Definiendo:

$$C_1 = \frac{1}{2}Ae^{i\alpha} \qquad C_2 = \frac{1}{2}Ae^{-i\alpha}$$

se obtiene:

$$x(t) = \frac{1}{2}Ae^{-\gamma t}(e^{i(\omega t+\alpha)} + e^{-i(\omega t+\alpha)}) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \alpha)$$

El movimiento es parecido a un movimiento armónico simple pero cuya amplitud no es constante sino que decae exponencialmente. La frecuencia de oscilación es menor que si no hubiera rozamiento.



2).- $\boxed{\omega_0^2 < \gamma^2}$ Las dos solucione son reales:

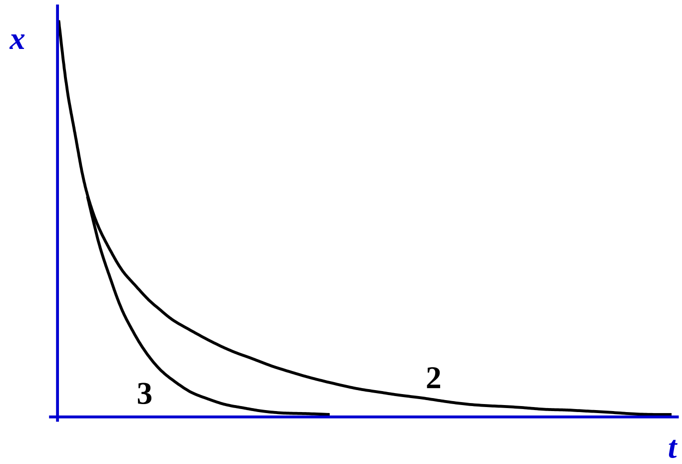
$$x(t) = C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t} \qquad \gamma_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \gamma_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

donde $\gamma_1, \gamma_2 > 0$. El rozamiento es tan grande que la partícula tiende a la posición de equilibrio sin oscilar.

3).- $\boxed{\omega_0^2 = \gamma^2}$ En este caso solo hay una solución para r. Por sustitución directa en la ecuación de movimiento es fácil ver que, cuando $\gamma = \omega_0$, una segunda solución es: $te^{-\gamma t}$. La solución es:

$$x(t) = e^{-\gamma t}\,(C_1 + C_2\,t)$$

El rozamiento hace que la partícula tienda muy rápidamente hacia la posición de equilibrio.



Oscilador forzado

Supongamos el mismo problema que en el caso anterior con una fuerza oscilante aplicada: $F = F_0 \cos\omega_f t$. La ecuación de movimiento es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \lambda\frac{dx}{dt} + F_0\cos\omega_f t$$

Como en el apartado anterior, esta ecuación se escribe:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\,\frac{dx}{dt} + \omega_0^2\,x = \frac{F_0}{m}\,\cos\omega_f t$$

Al principio el movimiento es una combinación del movimiento del oscilador amortiguado y de las oscilaciones frozadas por la fuerza externa. Al cabo de un tiempo el movimiento del oscilador amortiguado tiende a extinguirse y el único que prevalece es el debido a la fuerza externa. Se supone una solución de la forma:

$$x(t) = A\,\sin(\omega_f t - \alpha)$$

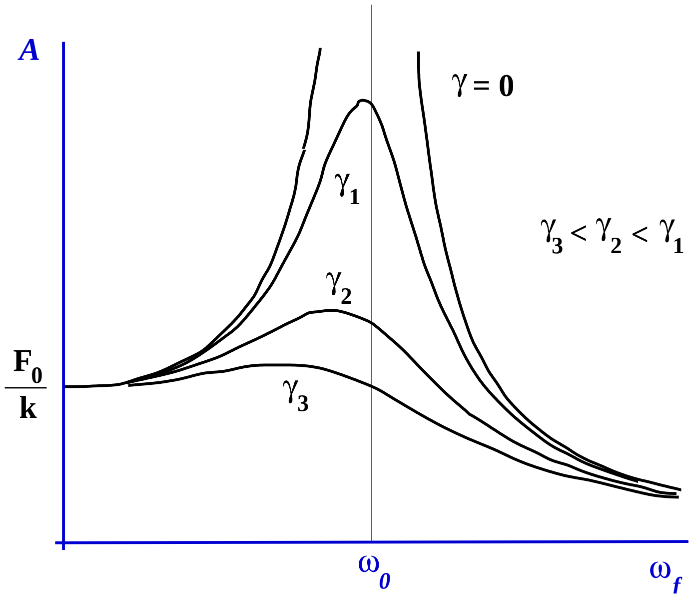
Sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene:

$$A = \frac{1}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}} \frac{F_0}{m}$$

y

$$\tan\alpha = \frac{\omega_f^2 - \omega_0^2}{2\gamma\omega_f}$$

Si se representa la amplitud frente a la frecuencia de la fuerza:



La frecuencia correspondiente al máximo de la amplitud se aproxima a la frecuencia natural del oscilador ω_0 a medida que el rozamiento disminuye. Además el valor máximo de la amplitud aumenta hasta llegar a infinito cuando el rozamiento es cero. El valor máximo de la amplitud ocurre cuando $\omega_f^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2$. Cuando $\omega_f = \omega_0$ se dice que hay *resonancia*.
La velocida es:

$$v(t) = \frac{\omega_f}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}} \frac{F_0}{m} \cos(\omega_f t - \alpha)$$

La amplitud en la velocidad es máxima cuando $\omega_f = \omega_0$, y también es máxima la amplitud de la energía cinética. Cuando hay resonancia la transferencia de energía de la fuerza al oscilador es máxima.