# Sistema de Partículas

Sea un sistema de partículas de masas $m_1$, $m_2$, ... y vectores posición $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, ..., se define el centro de masas como el punto cuyo vector posición es:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{M}$$

donde $M = \sum_i m_i$ es la masa total del sistema.

La velocidad del centro de masas es:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{v}_i = \frac{1}{M}\sum_i \vec{p}_i = \frac{1}{M}\vec{P}$$

donde $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$ es el momento lineal total del sistema.

$$\boxed{\vec{P} = M\,\vec{v}_{CM} \equiv \vec{P}_{CM}}$$

El momento total del sistema es igual al de una partícula de masa $M$ y situada en el centro de masas.

La variación con respecto al tiempo del momento lineal total es:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \sum_i \underbrace{m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}}_{\text{Ec. de Newton}} = \sum_i \left(\vec{F}_i + \sum_{j\neq i}\vec{F}_{ij}\right)$$

La fuerza que actúa sobre la partícula $i$ es la suma de la fuerza que agentes externos al sistema ejercen sobre la partícula $i$ ($\vec{F}_i$ *fuerza externa*) y las fuerzas que el resto de partículas ejercen sobre esta partícula ($\vec{F}_{ij}$: *fuerza interna* que la partícula $j$ ejerce sobre la $i$).

Como ejemplo sea el caso de 3 partículas. Las ecuaciones de Newton son:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} \\ m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} &= \vec{F}_2 + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} \\ m_3 \frac{d\vec{v}_3}{dt} &= \vec{F}_3 + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} \end{aligned}$$

La suma de las tres ecuaciones da:

$$\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{32}$$

La tercera ley de Newton implica que

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \qquad \vec{F}_{13} = -\vec{F}_{31} \qquad \vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32}$$

En general:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

La ecuación anterior queda:

$$\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

Volviendo a la ecuación del momento lineal total:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \equiv \vec{F}^E$$

La variación del momento lineal total de un sistema de partículas es igual a la suma de las fuerzas externas

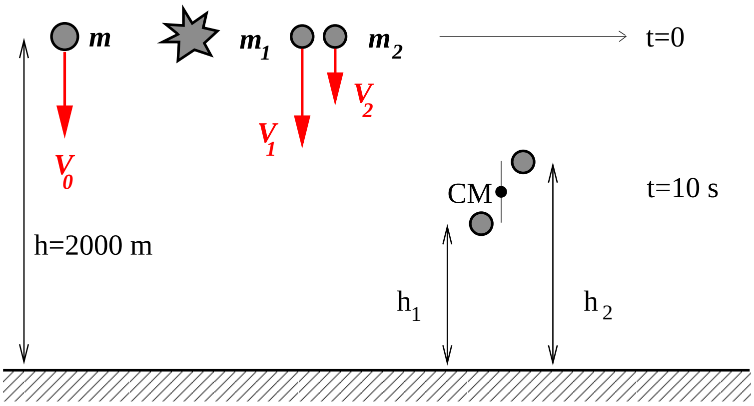
Si el sistema está aislado, el momento total $\vec{P}$ es constante y la velocidad del centro de masas $\vec{v}_{CM}$ es constante

El centro de masas se mueve como si en él estuvira una partícula de masa $M$ sometida a una fuerza $\vec{F}^E$

---

Ejemplo

◇ Una granada que cae verticalmente explota cuando se halla a una altura de 2000 m y tiene una velocidad de 60 m/s dividiendose en dos fragmentos iguales. Inmediatamente después de la explosión uno de los fragmentos se mueve hacia abajo a 80 m/s. Encontrar la posición del centro de masas del sistema al cabo de 10 s.




Como los dos fragmentos son iguales $m_1 = m_2 = m/2$. La única fuerza externa que actua es la gravedad. Después de la explosión $F_1 = -m_1 g$ y $F_2 = -m_2 g$ y la fuerza total externa sigue siendo $-mg$, como antes de la explosión (Esto no sería así si la fuerza de gravedad dependiera de la posición de las partículas) Debido a esto el centro de masas se mueve como si no hubiera habido explosión (ésta es debido a una fuerza interna del sistema):

$$h_{CM} = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 2000 - 60 \times 10 - \frac{1}{2} 10 \times 100 = 900 m$$

Se puede resolver este problema calculando la posición de cada uno de los fragmentos en $t = 10$ s. Para ello se necesita primero conocer la velocidad con la que sale el segundo fragmento $v_2$: el cambio del momento total viene dado por $\Delta \vec{P} = \vec{F}^E \Delta t$; en este caso la fuerza externa no es cero, pero se puede suponer que la explosión dura un tiempo extremadamente corto: $\Delta t \approx 0$. Es decir que $\vec{P}$ justo antes de la explosión es igual a $\vec{P}$ justo después de la misma:

$$m v_0 = \frac{1}{2} m v_1 + \frac{1}{2} m v_2 \quad - 60 = \frac{1}{2} 80 + \frac{1}{2} v_2 \quad v_2 = -40 m s^{-1}$$

La posición del primer fragmento a $t = 10$ s es:

$$h_1 = h + v_1 t - \frac{1}{2}gt^2 = 2000 - 80 \times 10 - \frac{1}{2}10 \times 100 = 700m$$

y la del segundo

$$h_2 = h + v_2 t - \frac{1}{2}gt^2 = 2000 - 40 \times 10 - \frac{1}{2}10 \times 100 = 1100m$$

Como ambos fragmentos tienen la misma masa el centro de masas se encuentra a una altura de

$$h_{CM} = \frac{1100 + 700}{2} = 900m$$

---

## Dos Partículas

En el caso de un sistema compuesto solo por dos partículas se puede resolver usando los resultados obtenidos anteriormente. Las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_{12} \\ m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} &= \vec{F}_2 + \vec{F}_{21} \end{aligned}$$

De antes sabemos que

$$\frac{d\vec{P}}{dt} M \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}^E$$

Restando ambas ecuaciones :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_1}{dt} - \frac{d\vec{v}_2}{dt} &= \frac{1}{m_1}(\vec{F}_1 + \vec{F}_{12}) - \frac{1}{m_2}(\vec{F}_2 + \vec{F}_{21}) = \\ &= \frac{1}{m_1}\vec{F}_1 - \frac{1}{m_2}\vec{F}_2 + \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{12} \end{aligned}$$

$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_{12}$ es la velocidad de la partícula 1 relativa a la 2.

Si el sistema está aislado ($\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = 0$):

$$\frac{d\vec{v}_{12}}{dt} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \vec{F}_{12}$$

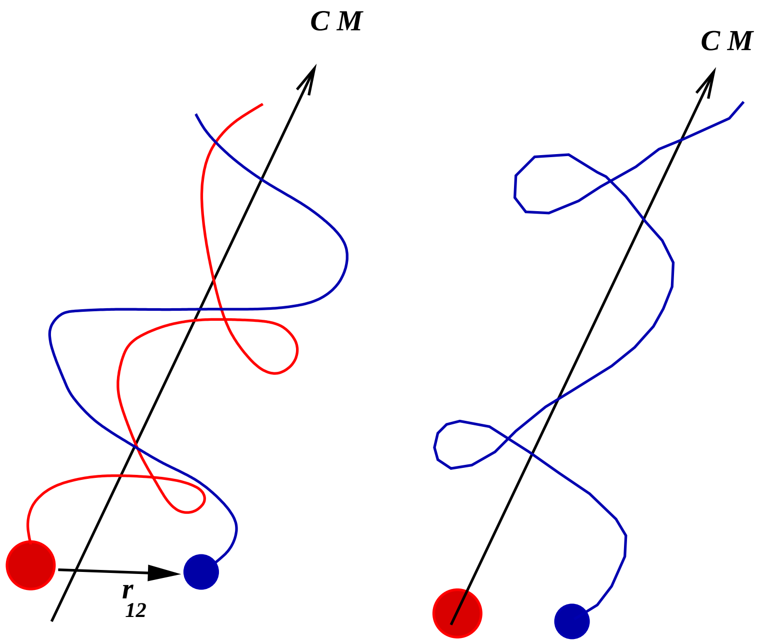
Se define la *masa reducida* de un sistema de dos partículas a la cantidad:

$$\boxed{\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}$$

En el caso de un sistema de dos partículas aisladas las ecuaciones de movimiento se reducen a:

$$\boxed{\vec{v}_{CM} = \text{constante}, \quad \mu \frac{\vec{v}_{12}}{dt} = \vec{F}_{12}}$$

En un sistema de dos partículas aisladas el movimiento relativo de ambas es equivalente al movimiento de una partícula de masa $\mu$ sometida a la fuerza interna




En el caso de una masa mucho mayor que la otra:

$$m_1 \ll m_2 \qquad \mu \approx \frac{m_1 m_2}{m_2} = m_1$$

El movimiento relativo es el de la partícula más ligera, la más pesada es como si estuviera en reposo.

Cuando el sistema está aislado el centro de masas se mueve a velocidad constante. Un observador en el centro de masas es un sistema inercial. Las velocidades de las partículas medidas en ese sistema son:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1{}^* &= \vec{v}_1 - \vec{V}_{CM} = \vec{v}_1 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{12} \\
\vec{v}_2{}^* &= \vec{v}_2 - \vec{V}_{CM} = \vec{v}_2 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_{12}
\end{aligned}$$

Los momentos son:

$$\vec{p}_1{}^* = m_1\vec{v}_1{}^* = \mu\vec{v}_{12} \qquad \vec{p}_2{}^* = m_2\vec{v}_2{}^* = -\mu\vec{v}_{12} \qquad \vec{P}^* = 0$$

La última ecuación es debida también a que la velocidad del centro de masas medida en el sistema centro de masas es cero: $\vec{v}_{CM}{}^* = 0$.

## Momento angular de un sistema de partículas

El momento angular total de un sistema de partículas es:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \ldots = \sum_i m_i \, \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

y su variación con respecto al tiempo es:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\vec{L}_2}{dt} + \frac{d\vec{L}_1}{dt} + \ldots = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \ldots$$

Sea un sistema de 3 partículas:

$$\begin{aligned}
\vec{M}_1 &= \vec{r}_1 \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}) \\
\vec{M}_2 &= \vec{r}_2 \times (\vec{F}_2 + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23}) \\
\vec{M}_3 &= \vec{r}_3 \times (\vec{F}_3 + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32})
\end{aligned}$$

y la suma es:

$$\sum_i \vec{M}_i = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} + (\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \times \vec{F}_{13} + (\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \times \vec{F}_{23}$$

Si las fuerzas internas entre cada par de partículas están dirigidas a lo largo de la línea que las une: $(\vec{r}_i - \vec{r}_j \parallel \vec{F}_{ij})$ entonces:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3$$

En general si se cumple la condición de que las fuerzas internas llevan siempre la dirección de las líneas que unen cada par de partículas:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^E}$$

Si el sistema está aislado o la suma de los momentos de las fuerzas exteriores es cero, el momento angular total del sistema es constante

En el sistema del centro de masas:

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_1 &= \vec{r}_1{}^* + \vec{r}_{CM}, \qquad \vec{r}_2 = \vec{r}_2{}^* + \vec{r}_{CM}, \quad \vec{r}_3 = \vec{r}_3{}^* + \vec{r}_{CM} \ldots \\
\vec{v}_1 &= \vec{v}_1{}^* - \vec{v}_{CM}, \qquad \vec{v}_2 = \vec{v}_2{}^* - \vec{v}_{CM}, \quad \vec{v}_3 = \vec{v}_3{}^* + \vec{v}_{CM} \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{L} &= m_1\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2\vec{r}_2 \times \vec{v}_2 + \ldots = \\
&= m_1(\vec{r}_1{}^* + \vec{r}_{CM}) \times (\vec{v}_1{}^* + \vec{v}_{CM}) + m_2(\vec{r}_2{}^* + \vec{r}_{CM}) \times (\vec{v}_2{}^* + \vec{v}_{CM}) + \ldots \\
&= m_1\vec{r}_1{}^* \times \vec{v}_1{}^* + m_2\vec{r}_2{}^* \times \vec{v}_2{}^* + \ldots + \vec{r}_{CM} \times (m_1\vec{v}_1{}^* + m_2\vec{v}_2{}^* + \ldots) + \\
&\quad +(m_1\vec{r}_1{}^* + m_2\vec{r}_2{}^* \ldots) \times \vec{v}_{CM} + (m_1 + m_2 + \ldots)\vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM}
\end{aligned}
$$

El primer término es el momento angular total medido en el sistema centro de masa.

El segundo término es cero ya que la expresión entre paréntesis es la velocidad del centro de masas medida en el sistema centro de masas, que es cero($\vec{v}_{CM}{}^* = 0$).

El tercer término también se cancela ya el término entre paréntesis es el vector posición del centro de masas en el sistema centro de masas ($\vec{r}_{CM}{}^* = 0$).

Finalmente el cuarto término es el momento angular de una partícula cuya masa es la masa total $M$ y se moviera con el centro de masas.

$$
\boxed{\vec{L} = \vec{L}^* + M\,\vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM}}
$$

En el caso de un sistema de 2 partículas:

$$\vec{L}^{\,*} = m_1 \vec{r}_1^{\,*} \times \vec{v}_1^{\,*} + m_2 \vec{r}_2^{\,*} \times \vec{v}_2^{\,*} = \vec{r}_1^{\,*} \times \vec{p}_1^{\,*} + \vec{r}_2^{\,*} \times \vec{p}_2^{\,*}$$

$$\begin{aligned}
\vec{r}_1^{\,*} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_{CM} = \vec{r}_1 - \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}_{12} \\
\vec{r}_2^{\,*} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_{CM} = \vec{r}_2 - \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} = -\frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}_{12}
\end{aligned}$$

Sustituyendo estas ecuaciones

$$\vec{L}^{\,*} = \frac{m_2 \vec{r}_{12} \times \mu \vec{v}_{12}}{m_1+m_2} + \frac{m_1 \vec{r}_{12} \times \mu \vec{v}_{12}}{m_1+m_2}$$

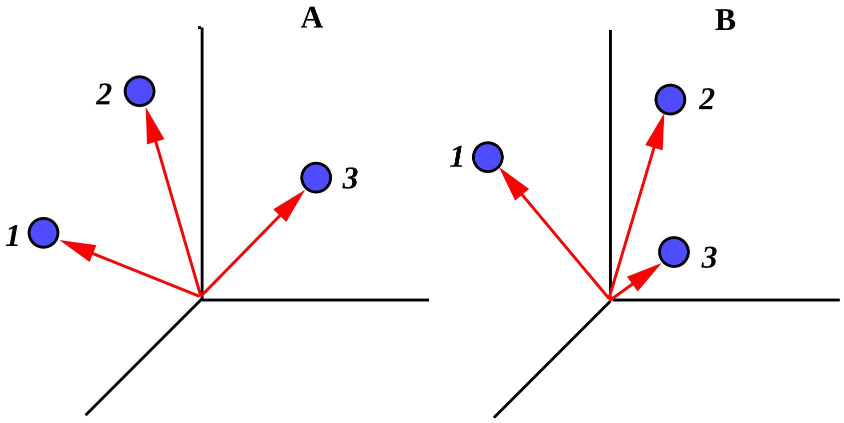
es decir para un sistema de 2 partículas:

$$\boxed{\vec{L}^{\,*} = \mu\, \vec{r}_{12} \times \vec{v}_{12}}$$

## Trabajo y energía de un sistema de partículas

El trabajo en sistema de partículas viene dado por:

$$\begin{aligned} dW &= dW_1 + dW_2 + \ldots = \\ &= (\vec{F}_1 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \ldots) \cdot d\vec{r}_1 + (\vec{F}_2 + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \ldots) \cdot d\vec{r}_2 + \ldots = \\ &= \underbrace{\vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \ldots}_{\text{Trabajo externo}} + \underbrace{\vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12} + \vec{F}_{13} \cdot d\vec{r}_{13} + \ldots}_{\text{Trabajo interno}} = \\ &= dW^E + dW^I \end{aligned}$$




El trabajo total entre la situación $A$ y la $B$ es:

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B (\vec{F}_1 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \ldots) \cdot d\vec{r}_1 + \int_A^B (\vec{F}_2 + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \ldots) \cdot d\vec{r}_2 + \ldots = \\ &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2(B) - \frac{1}{2}m_1 v_1^2(A) + \frac{1}{2}m_2 v_2^2(B) - \frac{1}{2}m_2 v_2^2(A) + \ldots = \\ &= T(B) - T(A) = W^E + W^I \end{aligned}$$

donde $T$ es la energía cinética total

$$T = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \ldots = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Si las fuerzas internas son conservativas:

$$\begin{aligned} W^I &= \int_A^B \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12} + \int_A^B \vec{F}_{13} \cdot d\vec{r}_{13} + \ldots = V_{12}(A) - V_{12}(B) + V_{13}(A) - V_{13}(B) + \ldots \\ &= V_{int}(A) - V_{int}(B) \end{aligned}$$

$$T(B) - T(A) = W^E + V_{int}(A) - V_{int}(B)$$

$$T(B) + V_{int}(B) - [T(A) + V_{int}(A)] = W^E$$

Se define *energía propia* del sistema a:

$$\boxed{U = T + V_{int} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + V_{int}}$$

Si el sistema está aislado la energía propia se conserva: $U(B) = U(A)$.

Si las fuerza sexternas son conservativas:

$$W^E = \int_A^B (\vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \ldots) = V_{ext}(A) - V_{ext}(B)$$

y

$$T(B) + V_{ext}(B) + V_{int}(B) = T(A) + V_{ext}(A) + V_{int}(A)$$

Se define *energía total* del sistema a

$$\boxed{E = T + V_{ext} + V_{int}}$$

$E$ permanece constante a lo largo del movimiento del sistema.

Generalmente $V_{int}$ depende de la posición relativa de las partículas y por tanto no depende del sistema de referencia. Se define *energía interna* a la energía propia medida en el sistema de referencia del centro de masas:

$$U_{int} = T^* + V_{int}$$

La energía cinética de un sistema de partículas es:

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \ldots = \\ &= \frac{1}{2} m_1 (\vec{v}_1{}^* + \vec{v}_{CM})^2 + \frac{1}{2} m_2 (\vec{v}_2{}^* + \vec{v}_{CM})^2 + \ldots = \frac{1}{2} m_1 v_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{*2} \ldots + \\ &\quad + \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \ldots) v_{CM}^2 + (m_1 \vec{v}_1{}^* + m_2 \vec{v}_2{}^* + \ldots) \cdot \vec{v}_{CM} \end{aligned}$$

El último término es cero ya que el término entre paréntesis es proporcional a la velocidad del centro de masas medida en el sistema centro de masas, que es cero.

$$\boxed{T = T^* + \frac{1}{2} M v_{CM}^2}$$

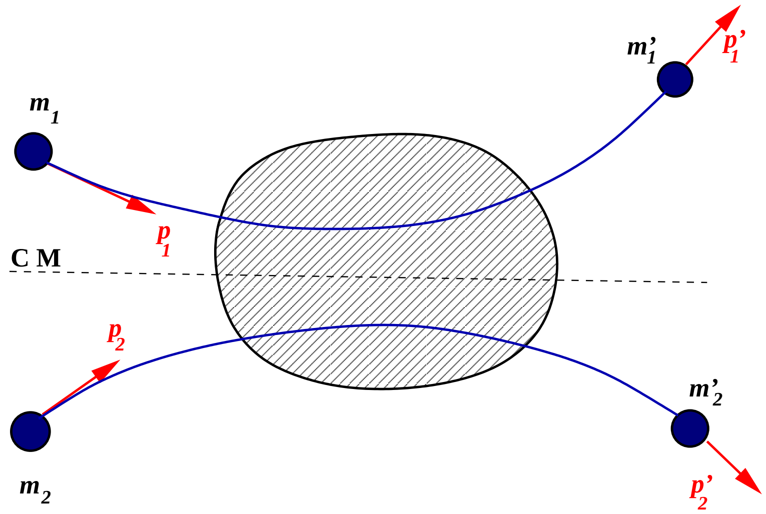
En un sistema de dos partículas:

$$T^* = \frac{1}{2} m_1 v_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{*2} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} v_{12}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} v_{12}^2$$

$$\boxed{T^* = \frac{1}{2} \mu \, v_{12}^2}$$

## Colisiones

Se supone dos partículas 1 y 2 aisladas se aproximan entre sí y la interacción entre ellas hace que sus trayectorias se curven y cambien sus momentos. Al final se vuelven alejar.




Aunque la masa total se conserva puede ocurrir que haya una reordenación de las masas iniciales (reacción química). Debido a que es un sistema aislado el momento total se conserva:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}'$$

La conservación de la energía es:

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V_{int} = \frac{p_1{}'^2}{2m_1'} + \frac{p_1{}'^2}{2m_2'} + V_{int}'$$

Se define $Q \equiv V_{int} - V_{int}'$:

$$T' = T + Q, \qquad \rightarrow \qquad \frac{p_1{}'^2}{2m_1'} + \frac{p_1{}'^2}{2m_2'} = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + Q$$

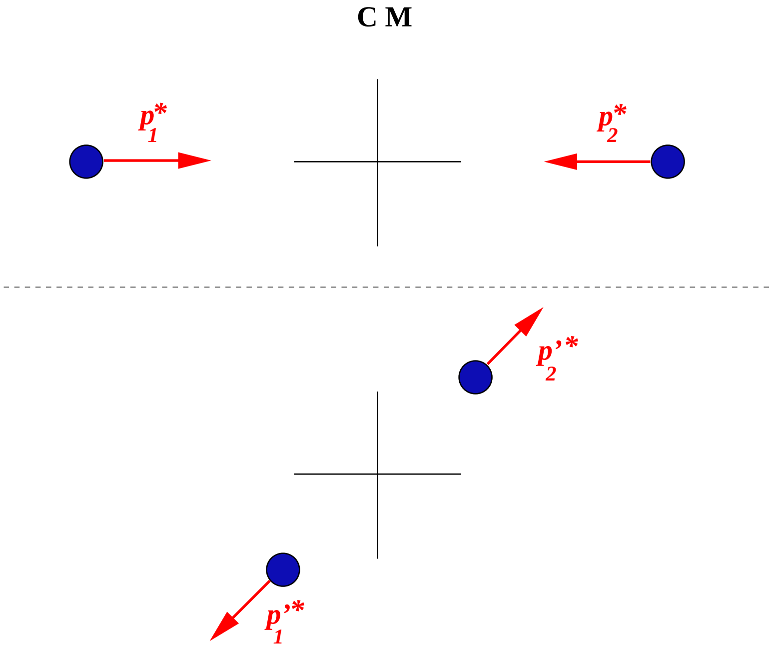
Si $Q = 0$ la energía cinética se conserva y es una colisión elástica. Si $Q \neq 0$ es una colisión inelástica. Cuando $Q < 0$ la energía cinética disminuye después de la colisión y la energía potencial interna aumenta. Lo contrario cuando $Q > 0$.

| | Variación con respecto al tiempo | Sistema partículas | 2 partículas,CM |
|---|---|---|---|
| Momento lineal | $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^E$ | $\vec{P} = M\vec{v}_{CM}$ | $\vec{P}^* = 0$ [a] |
| Momento angular | $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^E$ [b] | $\vec{L} = M\vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM} + \vec{L}^*$ | $\vec{L}^* = \mu\vec{r}_{12} \times \vec{v}_{12}$ |
| Energía cinética | | $T = \frac{1}{2}M\, v_{cm}^2 + T^*$ | $T^* = \frac{1}{2}\mu\, v_{12}^2$ |

[a] esta condición se verifica para cualquier número de partículas

[b] solo si las fuerzas internas llevan la dirección de las líneas que unen pares de partículas

Las ecuaciones anteriores pueden ser escritas en el sistema centro de masas. Usualmente la energía potencial es independiente del sistema de referencia.




$$\vec{p_1}^{\,*} + \vec{p_2}^{\,*} = 0 = \vec{p_1}^{\,\prime *} + \vec{p_2}^{\,\prime *}$$

El módulo de $\vec{p_1}^{\,*}$ es igual pero de signo contrario del de $\vec{p_2}^{\,*}$. Lo mismo con los vectores $\vec{p_1}^{\,\prime *}$ y $\vec{p_2}^{\,\prime *}$:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1'} + \frac{1}{m_2'}\right) {p_1}^{\prime *2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) {p_1}^{*2} + Q$$

$$\frac{{p_1}^{\prime *2}}{2\mu'} = \frac{{p_1}^{*2}}{2\mu} + Q$$

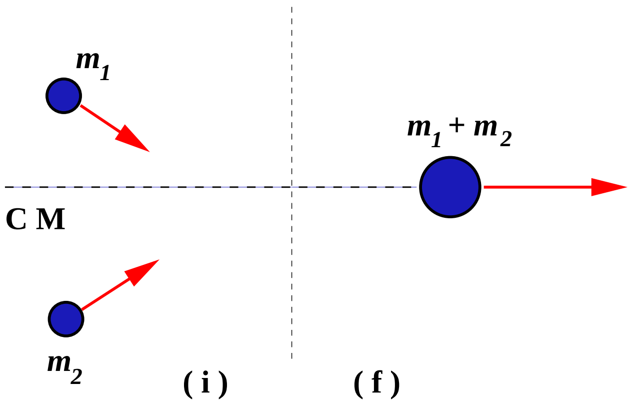
Si el choque es elástico $(Q = 0)$ y las masas son iguales antes y después de la colisión $(\mu' = \mu)$:

$${p_1}^{\prime *} = {p_1}^{*} \qquad \Rightarrow \qquad {p_2}^{\prime *} = {p_2}^{*}$$

En el sistema de referencia del centro de masas cada partícula conserva su energía cinética.

Ejemplo

◇ Dos partículas de masa $m_1$ y $m_2$ se mueven con velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$. Al colisionar quedan unidas moviéndose conjuntamente. Determinar el valor de $Q$ en esta colisión




$$Q = T' - T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 - \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

La velocidad final es la del centro de masas:

$$\vec{v}\,' = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2}\frac{(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)^2}{m_1 + m_2} - \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \\ &= -\frac{m_1 m_2(v_1^2 + v_2^2 - 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)}{m_1 + m_2} = -\frac{1}{2}\mu\, v_{12}^2 \end{aligned}$$

Si se resuelve este problema en el sistema de centro de masas:

$$0 = \frac{1}{2}(m_1{+}m_2)v'^{*2} = \frac{1}{2}m_1 v_1^{*2}{+}\frac{1}{2}m_2 v_2^{*2}{+}Q$$

$$Q = -T* = -\frac{1}{2}\mu v_{12}^2$$