Trabajo y Energía

A partir de la ecuación de Newton se puede integrar una vez:

$$\int_{p_0}^{p} d\vec{p} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\, dt \qquad \vec{p} - \vec{p}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\, dt$$

La cantidad

$$\vec{I} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\, dt$$

se la denomina *impulso* y describe cuanto cambia el momento lineal de la partícula en un cierto intervalo de tiempo debido a la acción de la fuerza $\vec{F}$. Una fuerza muy fuerte actuando durante un corto intervalo de tiempo puede ser equivalente (producir un cambio de momento similar) a una fuerza débil actuando durante un lapso de tiempo más largo.

Si se conoce $\vec{F}$ como función de t la integral anterior se puede realizar y obtener $\vec{p}(t)$. Volviendo a integrar se obtiene $\vec{r}(t)$. Sin embargo en la mayor parte de los casos se conoce $\vec{F}$ como función de $\vec{r}$: es decir como función de la posición de la partícula:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z)$$

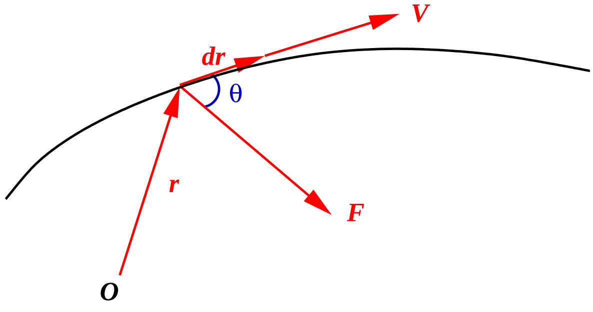
Por tanto la integral anterior no puede ser evaluada. Se necesita otros métodos matemáticos de evaluación.

Trabajo

Sea una partícula que se mueve bajo la acción de una fuerza $\vec{F}$. En un tiempo dt realiza un desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$. El *trabajo* efectuado por la fuerza durante el desplazamiento infinitesimal se define como:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F ds \cos\theta = F_T ds$$

$$[W] = ML^2T^{-2} = Nm \equiv J(\text{Julio})$$

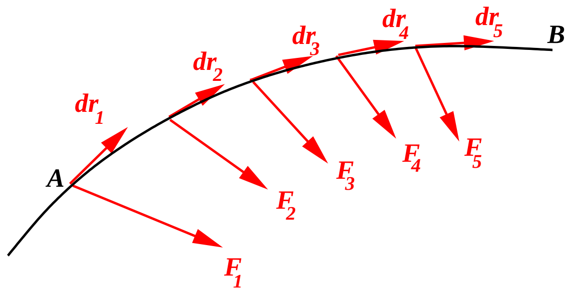


En un movimiento circular uniforme $\vec{F}$ es siempre perpendicular a $d\vec{r}$ y por tanto el trabajo es cero.
La definición anterior es para un desplazamiento infinitesimal. Si se considera un desplazamiento finito:

$$W = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \ldots$$

$$W = \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F_T ds$$



Si se conoce F_T como función de s (espacio recorrido a lo largo de la trayectoria) la integral anterior se puede calcular.

Un caso particular es cuando $\vec{F}$ es constante en dirección y magnitud y el cuerpo se mueve en línea recta en la dirección de la fuerza:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F dr = F \int_A^B dr = F s_{AB}$$

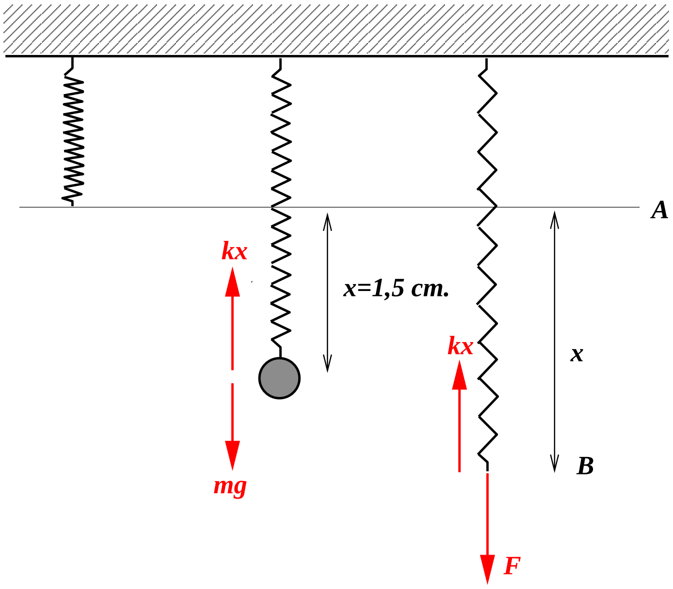
donde s_{AB} es la distancia entre el punto A y el punto B

En general:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B (F_x(x,y,z)\, dx + F_y(x,y,z)\, dy + F_z(x,y,z)\, dz)$$

Ejemplo

♢ Al colgar de un resorte una masa de 4 Kg. éste se extiende 1,5 cm. Calcular el trabajo para extender el resorte una distancia de 2 cm. sin aceleración.



Un muelle extendido una longitud x experimenta una fuerza $F = -kx$ que hace que vuelva a su posición de equilibrio. k es la constante de recuperación del muelle ($[k]$=NL^{-1}). Por tanto para extender sin aceleración el muelle una longitud x hay que ejercer una fuerza kx.
Al colgar una masa de 4 Kg. el muelle se extiende 1,5 cm., es decir:

$$mg = kx \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{mg}{x} = \frac{4 \,\mathrm{x}\, 10}{1,5 \,\mathrm{x}\, 10^{-2}} = 2,6 \,\mathrm{x}\, 10^{3} N/m$$

Para extender el muelle sin aceleración necesitamos ejercer una fuerza kx. El trabajo relaizado por esta fuerza es:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^x kx\, dx = \frac{1}{2}kx^2$$

Es decir

$$W = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}2,6 \,\mathrm{x}\, 10^3 \,\mathrm{x}\, (2 \,\mathrm{x}\, 10^{-2})^2 = 5,2 \,\mathrm{x}\, 10^{-1}\, J$$

Si sobre una partícula actúan varias fuerzas:

$$\begin{aligned} dW &= dW_1 + dW_2 + dW_3 + \ldots = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \vec{F}_3 \cdot d\vec{r}_3 + \ldots = \\ &= (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots) \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

Potencia

Se define *potencia instantánea* como la variación de trabajo por unidad de tiempo:

$$P = \frac{dW}{dt} \qquad\qquad [P] = ML^2T^{-3} = J\, sg^{-2} \equiv Watt$$

$$P = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

La *potencia promedio* durante un tiempo t es el trabajo total desarrollado en ese tiempo dividido por t:

$$\bar{P} = \frac{W}{t}$$

Energía cinética

Sea una partícula sometida a una fuerza total $\vec{F}$. El trabajo relaizado en un desplazamiento $d\vec{r}$ es:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_T\, ds = m\, \frac{dv}{dt}\, ds = m\, \frac{dv}{dt}\, v\, dt = m\, v\, dv$$

El trabajo entre un los puntos A y B de la trayectoria es:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{v_A}^{v_B} m\, v\, dv = \frac{1}{2}\, m\, v^2 \Big|_{v_A}^{v_B} = \frac{1}{2}\, m\, v_B^2 - \frac{1}{2}\, m\, v_A^2$$

Se define *energía cinética* a la cantidad:

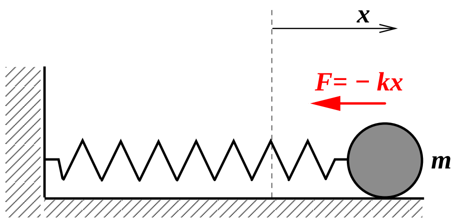
$$\boxed{T = \frac{1}{2}\, m\, v^2}$$

El trabajo entre un los puntos A y B es:

$$W = T_B - T_A$$

Ejemplo

◊ Sea un resorte de constante de recuperación k situado horizontalmente. La masa m su extremo se desplaza inicilamente una longitud a y se suelta. Calcular la energía cinética cunado se encuentra a una distancia x de la posición de equilibrio.



El desplazamiento y la fuerza llevan la misma dirección x. La posición A es la condición inicial ($v_A = 0$) y la posición B es la posición final, donde el desplazamiento es x y la velocidad es v:

$$W = T_B - T_A = \frac{1}{2}mv^2 = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^x (-kx)\, dx = \frac{1}{2}k(a^2 - x^2)$$

es decir:

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}(a^2 - x^2)}$$

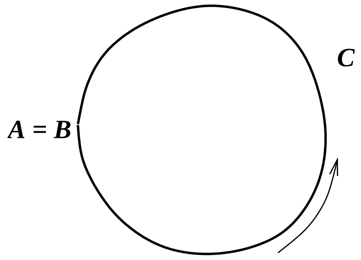
Energía potencial

La expresión general del trabajo entre las posiciones A y B era:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B (F_x(x,y,z)\, dx + F_y(x,y,z)\, dy + F_z(x,y,z)\, dz)$$

Esta integral se define como integral de camino ya que depende de la trayectoria (camino) que une los puntos A y B. Si la trayectoria cambia, el valor de la integral también. En general se verifica que

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$$



Se define *fuerza conservativa* aquella para la que la integral de camino no depende de la trayectoria sino de los puntos inicial y final . O

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \qquad \forall\, C$$

Si $\vec{F}$ es una fuerza conservativa entonces existe una función $V(x,y,z)$ denominada *energía potencial* tal que

$$\boxed{\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dV \qquad W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_A^B dV = V_A - V_B}$$

De la definición de fuerza conservativa:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dV$$

$$F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz = -\frac{\partial V}{\partial x}\, dx - \frac{\partial V}{\partial y}\, dy - \frac{\partial V}{\partial z}\, dz$$

Es decir:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla}\, V}$$

En la definición de energía potencial siempre aparece una constante arbitraria: Si $V(x, y, z)$ satisface las ecuaciones anteriores $V + C$, donde C es una constante, también. Esta constante se cancela al calcular el trabajo realizado entre dos posiciones. Usualmente la constante C se fija definiendo el nivel cero de la energía potencial:

Ejemplo

◇ Encontrar la energía potencial de la fuerza gravitatoria en la superficie de la tierra.
La fuerza es $\vec{F} = -mg\vec{u}_y$ donde la coordenada y ha sido definida a lo largo de la vertical siendo $y = 0$ la superficie de la tierra:

$$-mg = -\frac{dV}{dy} \qquad V = \int mg\, dy \qquad V = mgy + C$$

donde C es una constante de integración. Se fija ahora el nivel cero de la energía potencial: en este caso lo más simple es tomar $V = 0$ en $y = 0$. Sustituyendo en la ecuación anterior: $C = 0$

Ejemplo

♢ Demostrar que si una fuerza es central y su módulo depende solo de r entonces es conservativa y $V = V(r) = -dF/dr$. Aplicarlo al caso $F(r) = k/r^2$ donde k es una constante.
Si $V = V(r)$ con $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, entonces:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{dV}{dr}\frac{x}{r}$$

Lo mismo para las otra coordenadas:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{dV}{dr}\frac{y}{r} \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{dV}{dr}\frac{z}{r}$$

Por otra parte si la fuerza es central

$$\vec{F} = F(r)\vec{u}_r = F(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

$$F_x = F(r)\frac{x}{r} \qquad F_y = F(r)\frac{y}{r} \qquad F_z = F(r)\frac{z}{r}$$

Comparando con lo anterior

$$F(r) = -\frac{dV}{dr}$$

En el caso $F(r) = k/r^2$:

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{k}{r^2} \quad V = -\int \frac{k}{r^2}dr \quad V = \frac{k}{r} + C$$

La cosntante C se fija determinando el nivel cero de la energía potencial. Lo más simple en este caso es tomar $V = 0$ en $r = \infty$ lo que da $C = 0$.

Conservación de la energía

Cuando la fuerza que actúa sobre una partícula es conservativa, al calcular el trabajo entre dos posiciones arbitrarias:

$$W = T_B - T_A = V_A - V_B \qquad \Rightarrow \qquad T_A + V_A = T_B + V_B$$

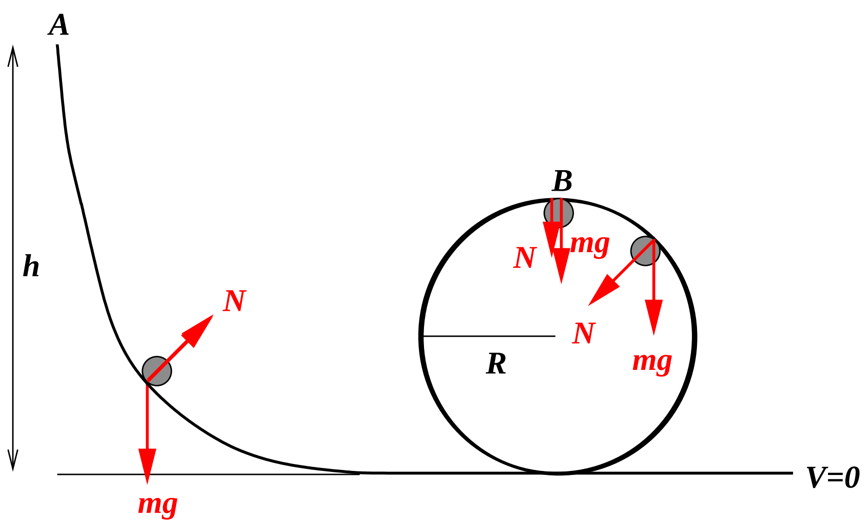
Como las posiciones son arbitrarias,lo anterior significa que la cantidad

$$\boxed{E = T + V}$$

llamada *energía total*, permanece constante a lo largo de la trayectoria.

Ejemplo

◇ Determinar la altura mínima h desde la que la bola ha de empezar a caer para completar el movimiento.



La fuerzas que actúan son la fuerza de la gravedad $m\vec{g}$ y la normal $\vec{N}$. Si se calcula el trabajo entre la posición A y la B:

$$W = \int_A^B (m\vec{g} + \vec{N}) \cdot d\vec{r}$$

Como la fuerza normal es ortogonal a la trayectoria $\vec{N} \cdot d\vec{r} = 0$, es decir esta fuerza no contribuye al trabajo. La única fuerza que hay que tener en cuenta es la de gravedad que es una fuerza conservativa cuyo potencial es $V = mgy$ siendo y la altura respecto de la superficie horizontal. Por la conservación de la energía:

$$T_A + V_A = T_B + V_B \qquad mgh = \frac{1}{2} m v_B^2 + mg2R$$

En el punto B la fuerza total está dirigida en la dirección del radio, luego, en ese punto toda la aceleración es normal:

$$N + mg = ma_N = m\frac{v_B^2}{R} \qquad \Rightarrow \qquad mv_B^2 = R(N + mg)$$

Sustiuyendolo en la ecuación anterior:

$$mgh = \frac{5}{2} mgR + \frac{1}{2} NR$$

Ya que N no puede ser negativa la altura mínima se obtiene cuando $N = 0$:

$$h = \frac{5}{2} R$$

Movimiento rectilíneo

En el caso del movimiento en una dimensión x, el potencial solo depende de dicha coordenada $V = V(x)$ y la energía es:

$$E = \frac{1}{2}m\,v^2 + V(x) = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V(x)$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]} \qquad \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}} = \int_0^t dt = t$$

La expresión anterior da una relación entre x y t que permite encontrar $x(t)$ con lo que queda resuelto el problema del movimiento rectilíneo.

En el caso en el que la integral anterior sea complicada, se puede obtener una descripción cualitativa del movimiento mediante el estudio de la curva de la energía potencial y teniendo en cuenta:

$$T = E - V(x) \geq 0 \qquad\qquad F = -\frac{dV}{dx}$$

Ejemplo

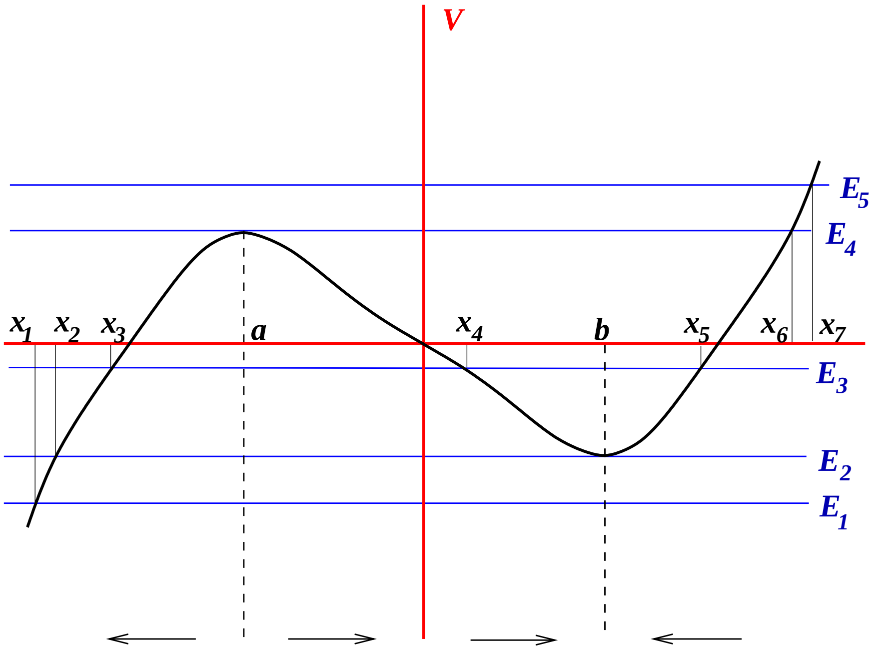
$\diamondsuit$ Describir el movimiento en una dimensión de una partícula de masa m sometida a un potencial $V = x^3 - 3x$.
La fuerza es

$$F(x) = -\frac{dV}{dx} = 3x^2 - 3$$

Cuando la pendiente de la curva $V(x)$ es positiva la fuerza es negativa y viceversa:

$$F \geq 0, \quad x < -1, x > 1 \qquad F \leq 0, \quad -1 < x < 1$$

Los puntos de máximo y mínimo $(dV/dx = 0)$ son *puntos de equilibrio estable*, los mínimos, y *puntos de equilibrio inestable* los máximos.



Si la partícula tiene una energía total

E_1: La partícula solo se puede mover en la región $-\infty < x < x_1$ ya que en el resto $E_1 < V(x)$. Si la partícula comienza su movimiento en $x = -\infty$ con velocidad infinita positiva, la fuerza la va frenando, ya que es negativa. Cuando llegue al punto x_1 la velocidad es cero ($E_1 = V(x_1) \Rightarrow T = 0$), pero como la fuerza es negativa comenzará a moverse hacia la izquierda, regresando a $x = -\infty$. El punto x_1 se denomina punto de retorno.

E_2: La región permitida es $-\infty < x < x_2$ y $x = b$ que es un punto de equilibrio estable. Si la partícula se encontrara en la primera región su movimiento sería similar al descrito anteriormente siendo x_2 el punto de retorno. Si la partícula se encontrara en $x = b$ estaría en reposo: $E_2 = V(b)$.

E_3: Hay dos regiones permitidas: $-\infty < x < x_3$ y $x_4 < x < x_5$. Si se encontrara en la primera el movimiento sería similar al descrito en el primer caso. Si la partícula se encontrara entre x_4 y b moviéndose, por ejemplo, hacia la derecha, ya que la fuerza es positiva es acelerado aumentando su velocidad. En el punto b la velocidad es máxima ($E_3 - V(x)$ es máximo en ese punto). A partir de ahí la fuerza es negativa y comienza a frenarse hasta el punto x_5 que es un punto de retorno. En x_5 la velocidad es cero pero la fuerza es negativa luego comienza a moverse hacia la izquierda pasando de nuevo por b

con máxima velocidad, pero negativa, hasta el punto de retorno x_4 y vuelve otra vez hacia la derecha repitiendo el mismo movimiento. En esta región (*pozo de potencial*) el movimiento es *oscilatorio*.

E_4: La región permitida es $-\infty < x < x_6$. Si la partícula viene desde $x = -\infty$ se va frenando hasta alcanzar el punto $x = a$ (punto de equilibrio inestable). Alcanza este punto con $v = 0$ y como la fuerza es cero se quedaría ahí en reposo. También puede moverse en la parte derecha siendo x_6 el punto de retorno, pero a diferencia del caso anterior no oscilaría ya que alcanza el punto a con velocidad cero quendándose en reposo.

E_5: La región permitida es $-\infty < x < x_7$ siendo x_7 el punto de retorno.
