Estática

En el caso de una partícula la condición para que esté en equilibrio se reduce a que la suma de todas las fuerzas que actúan sobre ella sea cero:

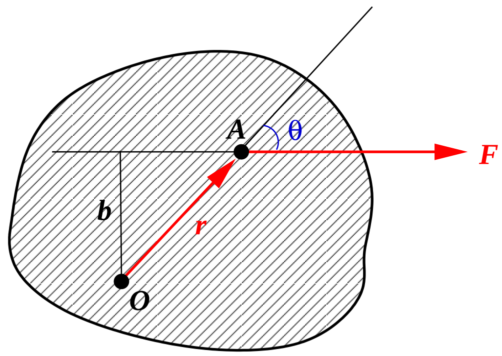
$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

En el caso de un cuepo extenso en el que las fuerzas se aplican en diferentes puntos del mismo la condición de equilibrio es más complicada.

Momento de una fuerza

Sea una fuerza $\vec{F}$ aplicada en un punto A de cuerpo C que puede girar libremente alrededor del punto O.

La "efectividad" de la fuerza para producir un giro alrededor de C es proporcional a la intensidad de la misma (módulo) y a la distancia perpendicular desde O a la línea de acción de la fuerza: $b|\vec{F}| = r\sin\theta\,|\vec{F}|$



Comparando este resultado con el módulo del producto vectorial se define *Momento de la fuerza* respecto del punto O:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad\qquad [M] = Nm$$

$\vec{F}$ puede estar aplicada en puntos de la línea de acción sin que cambie $\vec{M}$.
Si todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo tienen como punto de aplicación el mismo punto A, el momento total es:

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \ldots = \vec{r}\times\vec{F}_1 + \vec{r}\times\vec{F}_2 + \vec{r}\times\vec{F}_3 + \ldots = \\ &= \vec{r}\times(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots) = \vec{r}\times\vec{F}\end{aligned}$$

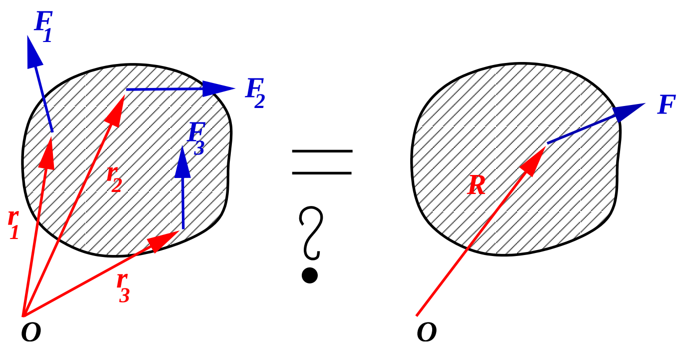
Composición de fuerzas aplicadas a cuerpo

Si en un cuerpo actúan varias fuerzas que están aplicadas en puntos diferentes producen dos efectos distintos: traslación y rotación.
La traslación viene determinada por la fuerza total:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots = \sum_i \vec{F}_i$$

La rotación depende del momento total respecto de un punto O:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \ldots = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 \ldots = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$



¿Existe un punto de aplicación de la fuerza total $\vec{F}$ tal que $\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$? En el caso que $\vec{R}$ exista el sistema puede ser reducido a una sola fuerza actuando en $\vec{R}$.

En general esto no es así: $\vec{F}$ y $\vec{M}$ han de ser ortogonales y esto no siempre ocurrirá. Un ejemplo sencillo:

Par de fuerzas: Sea un cuerpo donde se aplican dos fuerzas paralelas en diferentes puntos A y B, iguales y de sentidos opuestos: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Es evidente que la fuerza total es cero pero el momento total es:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_A \times \vec{F}_1 + \vec{r}_B \times \vec{F}_2 = \vec{r}_A \times \vec{F}_1 - \vec{r}_B \times \vec{F}_1 = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}_1 \neq 0$$

Aunque la fuerza total es cero hay un efecto neto de rotación.

Fuerzas coplanares

Cuando las fuerzas son coplanares es posible encontrar $\vec{R}$ (excepto en el caso de un par de fuerzas) ya que siempre $\vec{F}$ es ortogonal a $\vec{M}$. De hecho hay un número infinito de puntos donde se aplica la fuerza total

---

Ejemplo

◇ Sobre un cuerpo actúan tres fuerzas: $\vec{F}_1 = 10\,\vec{u}_x$, $\vec{F}_2 = -8\,\vec{u}_x + 8\,\vec{u}_y$ y $\vec{F}_3 = -7\,\vec{u}_y$ (todas ellas en N.) aplicadas en los puntos: $\vec{r}_1 = 5\,\vec{u}_x + 3\,\vec{u}_y$, $\vec{r}_2 = 5\,\vec{u}_y$ y $\vec{r}_3 = 2\,\vec{u}_x$ (en m.) Encontrar $\vec{R}$.
La fuerza total es:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 2\,\vec{u}_x + \vec{u}_y \quad N$$

Los momentos son:

$$M_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{pmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ 5 & 3 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -30\,\vec{u}_z \quad Nm$$

$$M_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ 0 & 5 & 0 \\ -8 & 8 & 0 \end{pmatrix} = 40\,\vec{u}_z \quad Nm$$

$$M_3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \end{pmatrix} = -14\,\vec{u}_z \quad Nm$$

El momento total es $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = -4\,\vec{u}_z$ Nm. La fuerza total es $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 2\vec{u}_x + \vec{u}_y$. El vector $\vec{R}$ verifica: $\vec{R} \times \vec{F} = \vec{M}$:

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ X & Y & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (X - 2Y)\,\vec{u}_z = -4\,\vec{u}_z$$

Todos los puntos en la recta $X - 2Y = -4$ cumplen la condición.

Fuerzas paralelas

Si todas las fuerzas son paralelas a un vector unitario $\vec{u}$:

$$\vec{F}_i = F_i\,\vec{u} \qquad \vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \left(\sum_i F_i\right)\,\vec{u}$$

y el momento de fuerza es:

$$\vec{M} = \sum_i \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right) = \sum_i \left(\vec{r}_i \times F_i\vec{u}\right) = \left(\sum_i F_i\,\vec{r}_i\right) \times \vec{u}$$

que es perpendicular a $\vec{u}$ y por tanto a $\vec{F}$. Se puede encontrar un vector $\vec{r}_c$ llamado *centro de fuerzas paralelas* tal que:

$$\vec{r}_c \times \vec{F} = \vec{M}$$

$$\vec{r}_c \times \left(\sum_i F_i\right)\,\vec{u} = \left(\sum_i F_i\right)\vec{r}_c \times u \left(\sum_i F_i\vec{r}_i\right) \times \vec{u}$$

es decir:

$$\left(\sum_i F_i\right)\vec{r}_c = \left(\sum_i F_i\vec{r}_i\right)$$

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i F_i\vec{r}_i}{\sum_i F_i} = \frac{F_1\vec{r}_1 + F_2\vec{r}_2 + \ldots}{F_1 + F_2 + \ldots}$$

Un sistema de fuerzas paralelas puede reducirse a una sola fuerza aplicada en $\vec{r}_c$.

La aplicación más importante es en el caso de un objeto de masa M en la superficie de la Tierra. Sobre cada partícula del cuerpo de masa m_i actúa la fuerza de gravedad $m_i\vec{g} = m_i g\vec{u}_g$. La fuerza total es $\vec{F} = \sum_i m_i\vec{g} = M\vec{g} = Mg\vec{u}_g$ y el centro de fuerzas, que en este caso se denomina *centro de masas* es:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i g\vec{r}_i}{\sum_i m_i g} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{M}$$

Estática

Una partícula está en equilibrio cuando la suma de todas las fuerzas que actúan es cero. Sin embargo un cuerpo rígido está en equilibrio si la suma de las fuerzas y la suma de los momentos de las fuerzas respecto de cualquier punto son cero:

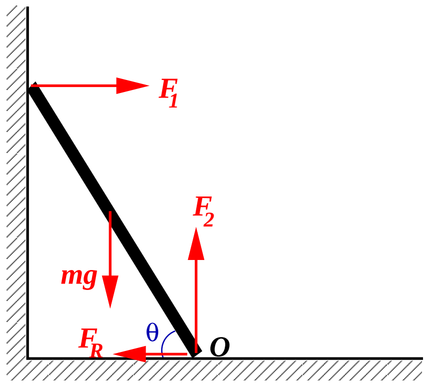
$$\sum_i \vec{F}_i = 0, \qquad \sum_i \vec{M}_i = 0$$

Ejemplo

$\diamondsuit$ Una escalera de masa m y longitud l está apoyada contra una pared formando un ángulo θ con el suelo. Si entre la escalera y la pared no hay fuerza de rozamiento encontrar la fuerza de reacción de la pared sobre la escalera.

Las fuerzas que actúan sobre la escalera son: el peso mg que se aplica en el centro de masas, es decir en $l/2$; la fuerza de reacción del suelo sobre la escalera $\vec{F}_2$ que es una fuerza normal; la fuerza de rozamiento entre la escalera y el suelo $\vec{F}_R$ y finalmente la fuerza de reacción de la pared sobre la escalera $\vec{F}_1$ que también es normal.

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} F_1 - F_R & = & 0 \\ F_2 - mg & = & 0 \end{array} \right.$$



Los momentos se pueden calcular respecto del punto O: los momentos de las fuerzas $\vec{F}_R$ y $\vec{F}_2$ son cero:

$$\vec{M}_g = \begin{pmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ -l/2\,\cos\theta & l/2\,\sin\theta & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{pmatrix} = \frac{l}{2} mg \cos\theta \,\vec{u}_z$$

$$\vec{M}_1 = \begin{pmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ -l\cos\theta & l\sin\theta & 0 \\ F_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -lF_3\sin\theta\,\vec{u}_z$$

Igualando a cero la suma de ambos momentos se obtiene:

$$\frac{l}{2}mg\cos\theta - lF_3\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad F_3 = \frac{mg\cos\theta}{2\sin\theta}$$
