Dinámica

La Dinámica es el estudio de la relación entre el movimiento de un cuerpo y las causas que motivan dicho movimiento. Estas causas es el resultado de las *interacciones* con otros cuerpos. Las interacciones vienen descritas por lo que se denomina *fuerza*.

Partícula libre es aquella que no está sujeta a interacción alguna. También se define como aquella que está completamente aislada.

♠ Ley de Inercia o 1^0 Ley de Newton: Una partícula libre se mueve siempre con velocidad constante o sin aceleración

¿Con respecto a quién? : con respecto a un observador (Sistema de coordenadas) que a su vez es una partícula libre (*Observador inercial o Sistema inercial*).

Momento Lineal

Masa es un número que se asocia a cada partícula y se obtiene comparandola con un la de un cuerpo patrón mediante una balanza de brazos iguales. Se supone que su valor no depende del estado de movimiento.
Se define momento lineal:

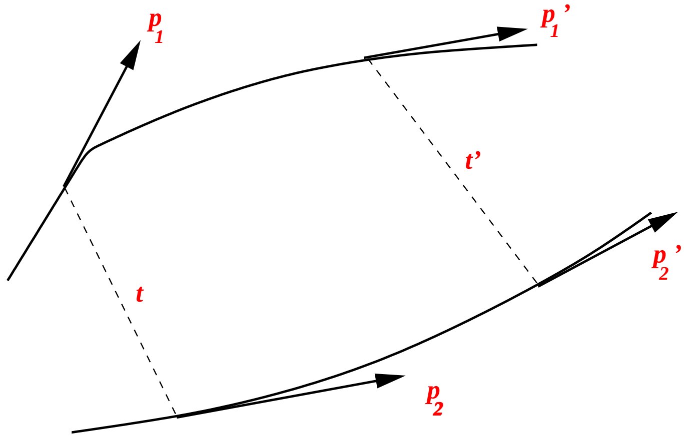
$$\vec{p} = m\,\vec{v} \qquad\qquad [p] = MLT^{-1}$$

$\vec{p}$ combina los dos elementos más importantes que caracterizan el estado dinámico de la partícula.

Ley de Inercia: Una partícula libre se mueve con momento constante.

Conservación del Momento

Sea un observador inercial que mide el movimiento de 2 partículas con masas m_1 y m_2 que están interacuando. Como resultado de la interacción sus velocidades cambian con el tiempo y sus trayectorias son curvas.



El momento total del sistema en el tiempo t es:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \, \vec{v}_1 + m_2 \, \vec{v}_2$$

y en t':

$$\vec{P}\,' = \vec{p}\,'_1 + \vec{p}\,'_2 = m_1 \, \vec{v}\,'_1 + m_2 \, \vec{v}\,'_2$$

De las observaciones se obtiene el siguiente resultado experimental:

$$\vec{P} = \vec{P}\,' \qquad \forall \;\; t, t'$$

El Momento total de un sistema compuesto de dos partículas en interacción mutua permanece constante. Este resultado se verifica para cualquier número de partículas que formen un sistema aislado: solo sometidas a su propia interacción mutua.

El Momento total de un sistema aislado de partículas en interacción mutua permanece constante

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots = \text{constante}$$

Volviendo al caso de dos partículas:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}\,'_1 + \vec{p}\,'_2$$

$$\vec{p}\,'_1 - \vec{p}_1 = -(\vec{p}\,'_2 - \vec{p}_2) \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$$

El cambio de momento de una partícula en un cierto intervalo de tiempo es igual y opuesto al cambio de momento de la segunda partícula: el momento que "pierde" una lo "gana" la otra. Diviendo la ecuación anterior por el intervalo de tiempo $\Delta t = t' - t$ y tomano límites:

$$\frac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

Se denomina *fuerza* al cambio del momento de una partícula con respecto al tiempo.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad [F] = MLT^{-2} \equiv N \text{ (Newton)}$$

♠ 2^0 Ley de Newton: $\vec{F} = m\,\vec{a}$

Si la masa es constante.

Para la interacción entre dos partículas:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

siendo $\vec{F}_1$ la fuerza sobre la partícula 1debido a su interacción con la 2, y $\vec{F}_2$ la fuerza sobre la partícula 2 debido a la 1.

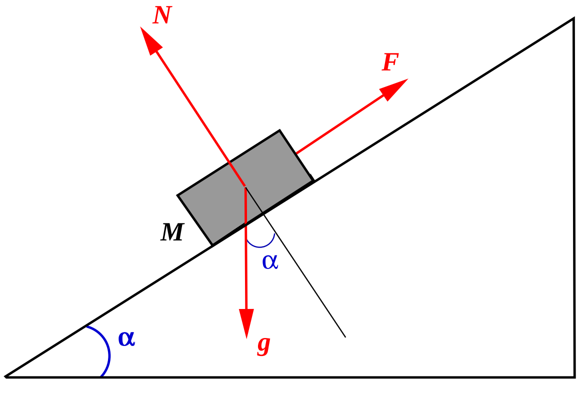
♠ Ley de acción y reacción o 3^0 Ley de Newton: la fuerza sobre una partícula es igual y opuesta a la fuerza sobre la otra

Si la partícula de masa m interacciona con las partículas m_1, m_2, m_3,... cada una produce una fuerza en m: $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$,... :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots = \sum \vec{F}_i = \vec{F}$$

Ejemplo

◇ Calcular la fuerza $\vec{F}$ para que la masa M suba por el plano inclinado con velocidad constante o con aceleración $\vec{a}$.



De la segunda Ley de Newton:

$$M\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + \vec{g}$$

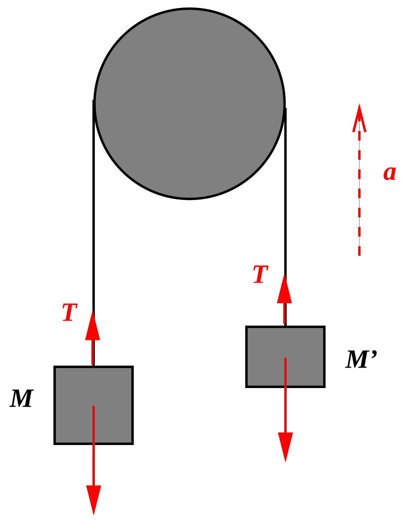
Si se toma un sistema de referencia tal que el eje X sea paralelo con el plano inclinado y el eje Y perpendicular a él, las componentes de la ecuación vectorial anterior son:

$$\begin{aligned} Ma &= F - Mg\sin\alpha \\ 0 &= N - Mg\cos\alpha \end{aligned}$$

La segunda ecuación sirve para determinar la fuerza normal N. Si sube con velocidad constante $a = 0$ y $F = Mg\cos\alpha$, sino $F = M(a + g\cos\alpha)$.

Ejemplo

◇ Determinar a suponiendo que la polea no tiene masa.



Todos los vectores tienen solo componentes verticales. La ecuación de Newton para cada una de las masas es (tomando signo positivo hacia arriba):

$$\begin{aligned} -Ma &= T - Mg \\ M'a &= T - M'g \end{aligned}$$

Restando ambas ecuaciones:

$$(M + M')\,a = (M - M')\,g \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{M - M'}{M + M'}\,g$$

El valor de la tensión es:

$$T = M\,g - M\,a = M\,g\left(1 - \frac{M - M'}{M + M'}\right) = \frac{2MM'}{M + M'}\,g$$

Fuerzas de fricción

Las fuerzas de fricción siempre se oponen al movimiento y aparecen cuando hay dos cuerpos en contacto. Se debe a la interacción entre las moléculas de los cuerpos.
La fuerza de fricción $\vec{F}_R$ lleva la dirección opuesta al movimiento del cuerpo y se comprueba experimentalmente que su módulo es proporcional a la magnitud de la fuerza normal entre ambos cuerpos. El coeficiente de proporcionalidad (no tiene dimensiones) se denomina *coeficiente de rozamiento*:

$$|\vec{F}_R| = \mu \, |\vec{N}|$$

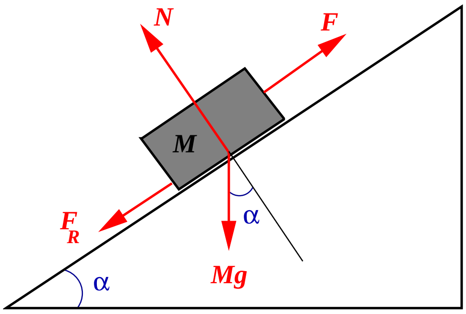
Hay dos tipos de coeficientes de rozamiento:

- coeficiente estático. Cuando el cuerpo está en reposo y actúa sobre él una fuerza. En este caso la fuerza de rozamiento da la fuerza mínima necesraia para poner en movimiento relativo los dos cuerpos que están inicialmnete en contacto: $|\vec{F}_R| \leq \mu_s \, |\vec{N}|$.

- coeficiente cinético. Cuando los dos cuerpos están en movimiento relativo: $|\vec{F}_R| = \mu_c \, |\vec{N}|$.

Ejemplo

◇ Encontrar F para que la masa M se mueva hacia arriba por el plano inclinado con aceleración a.



La ecuación de Newton es:

$$M \, \vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_R + M \, \vec{g}$$

Si se toma el eje X paraleo al plano inclinado y el eje Y perpendicular a él se obtiene:

$$\begin{aligned} M\,a &= F - Mg\sin\alpha - F_R \\ 0 &= N - Mg\cos\alpha \end{aligned}$$

La segunda ecuación da el valor de la fuerza normal: $N = Mg\cos\alpha$. La primera ecuación da:

$$M\,a = F - Mg\sin\alpha - \mu Mg\cos\alpha \quad \rightarrow \quad F = M[a + g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)]$$

Cuando el cuerpo se mueve en el interior de un fluído la fuerza de rozamiento se opone al movimiento y es proporcional a la velocidad:

$$\vec{F} = -K\eta\vec{v}$$

donde K es una constante que depende de la forma del cuerpo ($[K] = L$) y η es el coeficiente de viscosidad del fluído ($[\eta] = NTL^{-2} = ML^{-1}T^{-1}$).

Si el objeto está sometido a una fuerza constante $\vec{F}$ la ecuación de movimiento es:

$$m\vec{a} = \vec{F} - K\eta\vec{v}$$

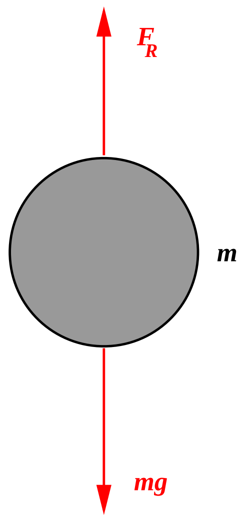
Si parte del reposo su velocidad irá creciendo hasta llegar a una velocidad límite:

$$\vec{v}_L = \frac{1}{K\eta}\,\vec{F}$$

En este momento la fuerza neta es cero y por tanto el objeto se moverá con velocidad constante $\vec{v}_L$

Ejemplo

◇ Sea un objeto que cae en el interior de un fluido bajo la acción de la gravedad partiendo del reposo.
Todos los vectores tienen solo componente vertical. Tomando el signo positivo en la dirección hacia "abajo":



$$m\frac{dv}{dt} = mg - K\eta v$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{K\eta v}{m} = \frac{K\eta}{m}(\frac{mg}{K\eta} - v)$$

$$\frac{dv}{\frac{mg}{K\eta} - v} = \frac{K\eta}{m}\,dt$$

$$\int_0^v \frac{dv}{\frac{mg}{K\eta} - v} = \int_0^t \frac{K\eta}{m}\,dt \quad \rightarrow \quad -\ln\left(\frac{mg}{K\eta} - v\right)\Big|_0^v = \frac{K\eta}{m}\,t$$

$$\ln\left(\frac{mg}{K\eta} - v\right) - \ln\frac{mg}{K\eta} = -\frac{K\eta}{m}\,t$$

$$\frac{mg}{K\eta} - v = \frac{mg}{K\eta}\,e^{-\frac{K\eta}{m}\,t} \quad \rightarrow \quad v = \frac{mg}{K\eta}\left(1 - e^{-\frac{K\eta}{m}\,t}\right)$$

$$v = v_L\left(1 - e^{-\frac{K\eta}{m}\,t}\right)$$

Si $t \rightarrow \infty$, $v \rightarrow v_L$.

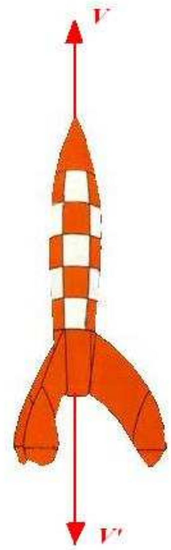
Masa variable

La masa de las partículas y de cualquier objeto es constante. Sin embargo hay sistemas en los que la masa es variable.
Un cohete es un ejemplo de este tipo de sistemas. Sea $\vec{v}$ la velocidad del cohete con respecto a la Tierra en un tiempo t y $\vec{v}\,'$ la velocidad de salida de los gases medida desde el mismo sistema.

La velocidad de salida de los gases vistos desde el cohete es:

$$\vec{v}_e = \vec{v}\,' - \vec{v}$$

Esta velocidad es opuesta a $\vec{v}$ y se supone constante.



En el tiempo t: m es la masa del cohete, $\vec{v}$ es su velocidad y $\vec{p} = m\vec{v}$ su momento. En $t + dt$: $m + dm$ es la masa, $\vec{v} + d\vec{v}$ es la velocidad y el momento $\vec{p}\,'$ es el del cohete menos el momento de los gases expulsados:

$$\begin{aligned}\vec{p}\,' &= (m + dm)(\vec{v} + \vec{v} + d\vec{v}) - dm\,\vec{v}\,' \\ &\simeq m\vec{v} + md\vec{v} - (\vec{v}\,' - \vec{v})dm = m\vec{v} + md\vec{v} - \vec{v}_e\,dm\end{aligned}$$

$$d\vec{p} = \vec{p}\,' - \vec{p} = m\,d\vec{v} - \vec{v}_e\,dm \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_e\frac{dm}{dt}$$

La segunda ley de Newton establece que la variación del momento es igual a la fuerza externa, en este caso la gravedad:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{g} \quad \rightarrow \quad m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_e\frac{dm}{dt} = m\vec{g}$$

Todos los vectores tienen solo componente vertical:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v_e}{m}\frac{dm}{dt} = -g$$

Las condiciones iniciales son: en $t = 0$, $v = 0$ y $m = m_0$:

$$\int_0^v dv + v_e \int_{m_0}^m \frac{dm}{m} = -g \int_0^t dt \quad \rightarrow \quad v = v_e \ln \frac{m_0}{m} - gt$$

Movimiento curvilíneo

Para que la trayectoria sea una curva la fuerza tiene hacer un ángulo con respecto a la velocidad:

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \Rightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{ll} F_T & = ma_T \\ F_N & = ma_N \end{array} \right.$$

$$F_T = m\frac{dv}{dt} \qquad\qquad F_N = m\frac{v^2}{\rho}$$

Si $F_T = 0$ el movimiento es circular uniforme. Si $F_N = 0$ el movimiento es rectilíneo.
En el caso del movimiento circular:

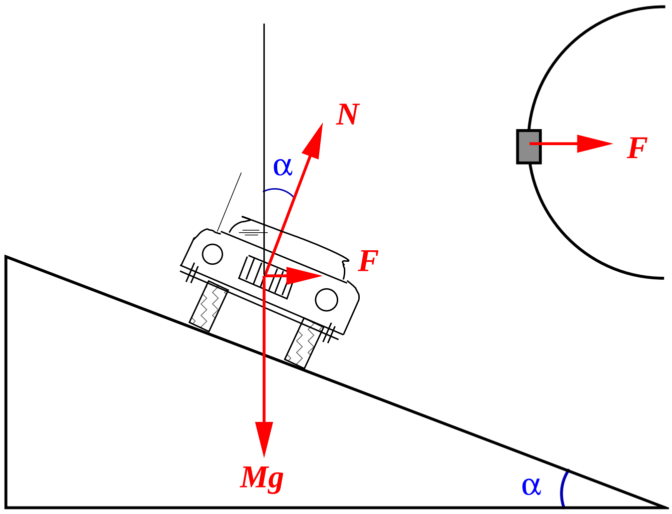
$$a_N = R\,\omega^2 \qquad F_N = m\,R\,\omega^2$$

En el caso del movimiento circular uniforme ($\omega =$constante):

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} \qquad \vec{F} = m\vec{a} = m\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{p}$$

Ejemplo

♢ Calcular el ángulo del peralte α para que un vehículo de masa M y a velocidad v describa la curva de radio R sin necesidad de girar el volante.



Las fuerzas que actuan sobre el coche son $M\vec{g}$ y la normal $\vec{N}$. Luego la ecuación de Newton se escribe como

$$M\,\vec{a} = \vec{N} + M\,\vec{g}$$

En la dirección vertical la componente de la aceleración es cero:

$$0 = N\ \cos\alpha - M\,g \qquad\qquad N = \frac{M\,g}{\cos\alpha}$$

La componente horizontal de la aceleración, aceleración normal, es: v^2/R:

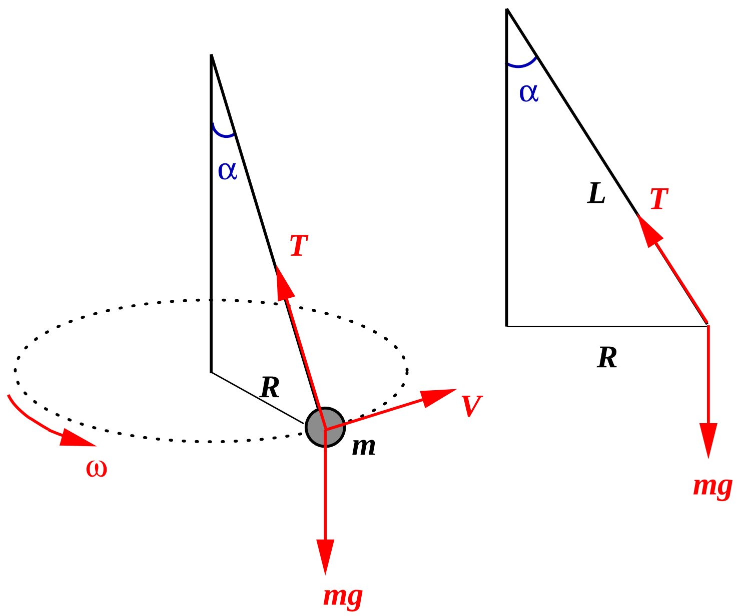
$$M\,\frac{v^2}{R} = N\sin\alpha \equiv F \qquad\qquad M\,\frac{v^2}{R} = M\,g\ \tan\alpha$$

es decir:

$$\tan\alpha = \frac{v^2}{g\,R}$$

Ejemplo

◇ Una masa m está suspendida de una cuerda de longitud L y gira alrededor de la vertical con velocidad angular ω. Encontrar el ángulo α que hace la cuerda con la vertical.



La ecuación de movimiento es

$$m\,\vec{a} = \vec{T} + m\,\vec{g}$$

La componente de la aceleración en la dirección vertical es cero:

$$0 = T\cos\alpha - mg \qquad\qquad T = \frac{mg}{\cos\alpha}$$

La componente horizontal (componente normal) es $R\omega^2$:

$$m\,\omega^2 R = T\sin\alpha = m\,g\tan\alpha \qquad\qquad \omega^2 L\sin\alpha = g\tan\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 L}$$

Momento Angular

Se define el *momento angular* de una partícula de masa m, respecto del origen O como:

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\,\vec{r} \times \vec{v} \qquad [L] = M L^2 T^{-1}}$$

Durante el movimiento de la partícula $\vec{L}$, en general, cambia tanto su módulo como la dirección.

En el caso de un movimiento circular, la dirección de $\vec{L}$ es constante. Si O está en el centro del círculo

$$L = m\,r\,v = m\,r^2\,\omega$$

Si el movimiento está contenido en un plano, la dirección de $\vec{L}$ es constante:

$$\vec{L} = m\,\vec{r} \times \vec{v} = m\,\vec{r} \times (\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = m\,\vec{r} \times \vec{v}_\theta \qquad L = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$$

En función de las componentes cartesianas el momento angular es:

$$L_x = yp_z - zP_y, \qquad L_y = zp_x - xp_z \qquad L_z = xp_y - yp_x$$

Veamos ahora como varía el momento angular a medida que la partícula recorre su trayectoria:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \cancel{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

El primer término es cero ya que es igual a $m\vec{v} \times \vec{v}$.

Usando la ecuación de Newton:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \equiv \vec{M}}$$

donde $\vec{M}$ es el *momento de la fuerza* respecto del origen O.

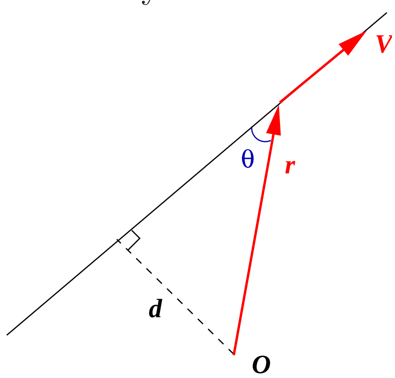
Fuerzas Centrales

Si $\vec{M} = 0$ entonces $\vec{L}$ =constante. Al ser constante la dirección de $\vec{L}$ el movimiento tiene lugar en un plano, el plano perpendicular a la dirección de $\vec{L}$.

$\vec{M} = 0$ si:

• $\vec{F} = 0$ (partícula libre) En este caso la trayectoria es una recta.

$L = m\,v\,r\,\sin\alpha = m\,v\,d$



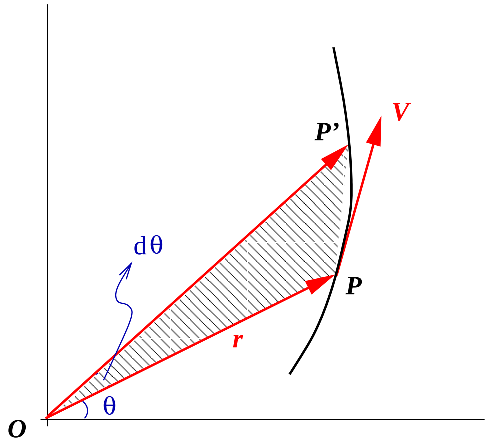
• $\vec{F} \neq 0$ pero $\vec{r} \times \vec{F} = 0$. Es decir los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$ son siempre paralelos: $\vec{F}$ siempre está dirigido en la dirección del punto O. Cuando este ocurre se dice que la fuerza $\vec{F}$ es una *fuerza central*.

La mayor parte de las fuerzas de la naturaleza son fuerzas centrales: fuerza gravitatoria, fuerza electrostática, etc.. Si una partícula está sometida a una fuerza central entonces su movimiento siempre tendrá lugar en un plano.

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{constante}$$

$$dA = \frac{1}{2}\, PP'\, r = \frac{1}{2}\, r^2\, d\theta$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{constante}$$



El radio vector barre áreas iguales en tiempos iguales: *Segunda Ley de Kepler* del movimiento planetario.