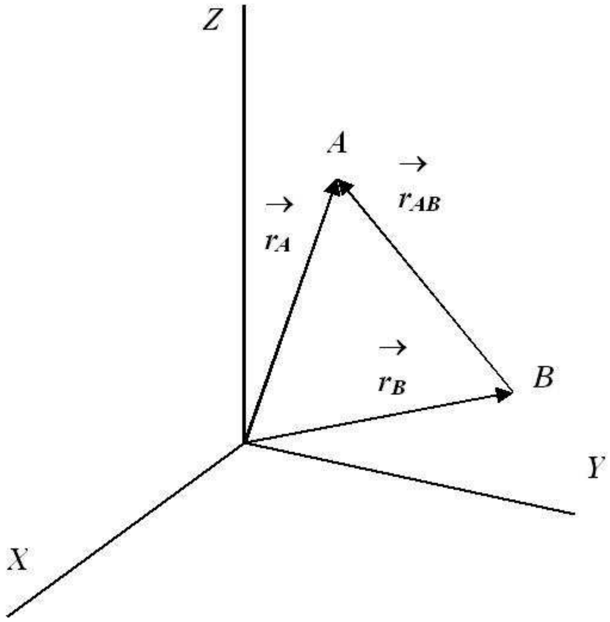
Movimiento Relativo

El movimiento es un concepto relativo. La descripción del movimiento de una partícula depende del observador. Diferentes observadores pueden usar diferentes sistemas de referencia. Es importante ver como se relacionan las observaciones que del mismo movimiento hacen diferentes observadores.

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$$

$$\vec{r}_{BA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$



La velocidad del punto A con respecto al punto B es:

$$\vec{v}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{dt} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$$

La del punto B con respecto a A:

$$\vec{v}_{BA} = \frac{\vec{r}_{BA}}{dt} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = -\vec{v}_{AB}$$

Si en los puntos A y B hubiera dos objetos loa vectores $\vec{v}_{AB}$ y $\vec{v}_{BA}$ represntan las *velocidades relativas*.

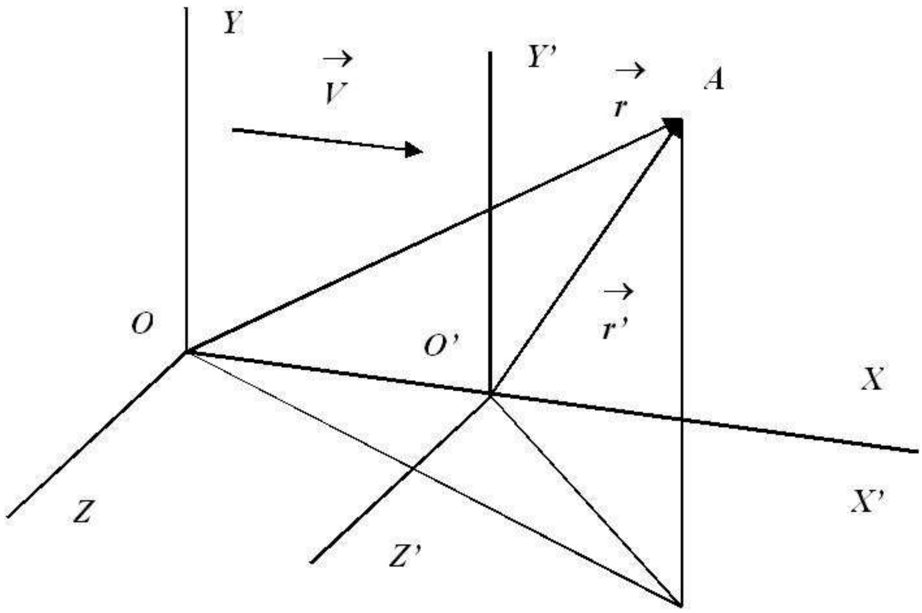
Lo mismo se define para las aceleraciones.

Movimiento relativo de traslación uniforme

Sean dos observadores O y O' moviendose uno con respecto al otro con velocidad constante $\vec{V}$ y tal que cuando $t = 0$ ambos coinciden, $O = O'$. Para simpificar se toma los ejes X y X' a lo largo de la linea del movimiento relativo y los ejes YZ e $Y'Z'$ paralelos entre sí:

$$\vec{OO'} = \vec{V}\ t$$

$$\vec{V} = V\ \vec{u}_x = V\ \vec{u}\,'_x$$



Una partículada en A:

$$\vec{r} = \vec{OO'} + \vec{r}\,' = \vec{V}\ t + \vec{r}\,' \qquad \rightarrow \qquad \vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{V}\ t$$

En componentes:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x' & = & x - V\ t \\ y' & = & y \\ z' & = & z \\ t' & = & t \end{array}}$$

Las ecuaciones anteriores, en forma vectorial o en componentes, se denominan Trasformaciones de Galileo

La velocidad de la partícula en A medida por ambos observadores es:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{v}\,' = \frac{d\vec{r}\,'}{dt'} = \vec{v} - \vec{V}$$

En componentes:

$$\begin{aligned} v\,'_x &= v_x - V \\ v\,'_y &= v_y \\ v\,'_z &= v_z \end{aligned}$$

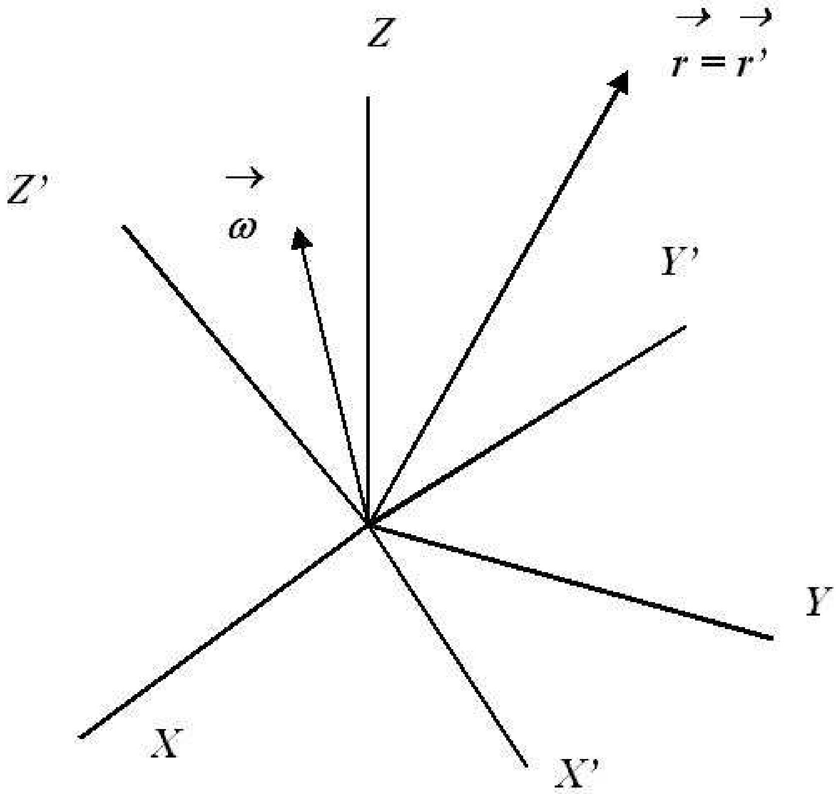
y la acelaración es:

$$\boxed{\vec{a}\,' = \vec{a}}$$

La aceleración de una partícula es la misma para todos los observadores en movimiento relativo de traslación uniforme

Movimiento relativo de rotación uniforme

Sean dos observadores O y O' que tienen el mismo origen pero giran uno con respecto al otro con velocidad angular ω constante.



$$\vec{r} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z = \vec{r}\,' = x'\,\vec{u}\,'_x + y'\,\vec{u}\,'_y + z'\,\vec{u}\,'_z$$

La derivada de esta expresión con respecto al tiempo da la relación entre las velocidades medidas en ambos sistemas de referencia de una partícula situada en $\vec{r}$ (hay que tener en cuenta que los vectores unitarios del sistema O' varían con el tiempo):

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{dx}{dt}\,\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\,\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\,\vec{u}_z = \\ &= \frac{dx'}{dt}\,\vec{u}\,'_x + \frac{dy'}{dt}\,\vec{u}\,'_y + \frac{dz'}{dt}\,\vec{u}\,'_z + x'\,\frac{d\vec{u}\,'_x}{dt} + y'\,\frac{d\vec{u}\,'_y}{dt} + z'\,\frac{d\vec{u}\,'_z}{dt} \end{aligned}$$

La velocidad medida en el sistema O es:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\,\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\,\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\,\vec{u}_z$$

mientras que la medida en O' es

$$\vec{v}\,' = \frac{dx'}{dt}\,\vec{u}\,'_x + \frac{dy'}{dt}\,\vec{u}\,'_y + \frac{dz'}{dt}\,\vec{u}\,'_z$$

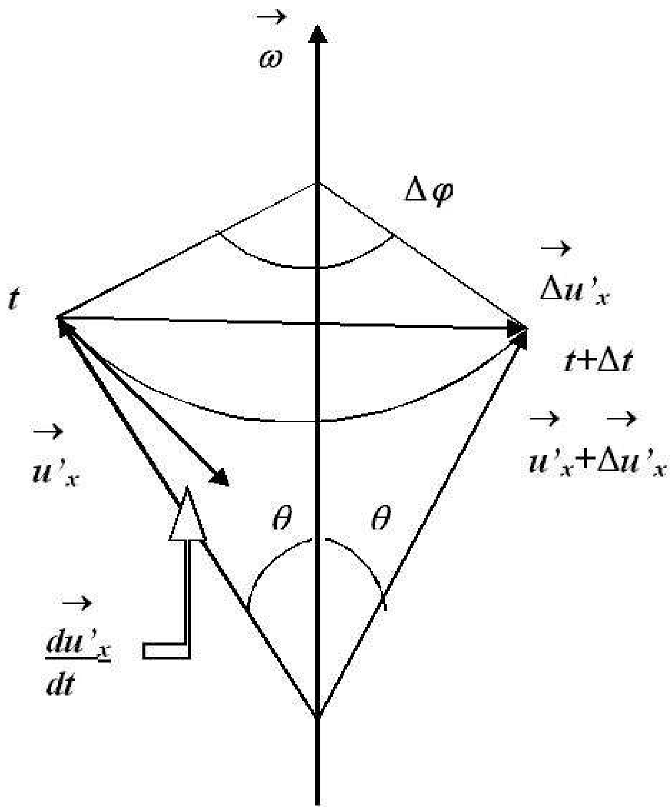
es decir:

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + x'\,\frac{d\vec{u}\,'_x}{dt} + y'\,\frac{d\vec{u}\,'_y}{dt} + z'\,\frac{d\vec{u}\,'_z}{dt}$$

Como los vectores unitarios $\vec{u}\,'$ tienen módulo constante su derivada es ortogonal a ellos mismos; además como giran con velocidad constante ω (como ejemplo tomamos el vector $\vec{u}\,_x$):

$$\frac{|\Delta\vec{u}\,'_x|}{\Delta t} = \sin\theta\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

$$\frac{d\vec{u}\,'_x}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{u}\,'_x$$



Sustituyendo:

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + x' \,\vec{\omega} \times \vec{u}\,'_x + y' \,\vec{\omega} \times \vec{u}\,'_y + z' \,\vec{\omega} \times \vec{u}\,'_z$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

Para encontrar la relación entre las aceleraciones escribimos primero la ecuación anterior en términos de las componentes:

$$v_x \,\vec{u}_x + v_y \,\vec{u}_y + v_z \,\vec{u}_z = v\,'_x \,\vec{u}\,'_x + v\,'_y \,\vec{u}\,'_y + v\,'_z \,\vec{u}\,'_z + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Tomando la derivada de esta ecuación

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt}\,\vec{u}_x + \frac{dv_y}{dt}\,\vec{u}_y + \frac{dv_z}{dt}\,\vec{u}_z &= \frac{dv\,'_x}{dt}\,\vec{u}\,'_x + \frac{dv\,'_y}{dt}\,\vec{u}\,'_y + \frac{dv\,'_z}{dt}\,\vec{u}\,'_z + \\ &+ \; v\,'_x\,\frac{d\vec{u}\,'_x}{dt} + v\,'_y\,\frac{d\vec{u}\,'_y}{dt} + v\,'_z\,\frac{d\vec{u}\,'_z}{dt} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + v\,'_x \,\vec{\omega} \times \vec{u}\,'_x + v\,'_y \,\vec{\omega} \times \vec{u}\,'_y + v\,'_z \,\vec{\omega} \times \vec{u}\,'_z + \vec{\omega} \times (\vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r})$$

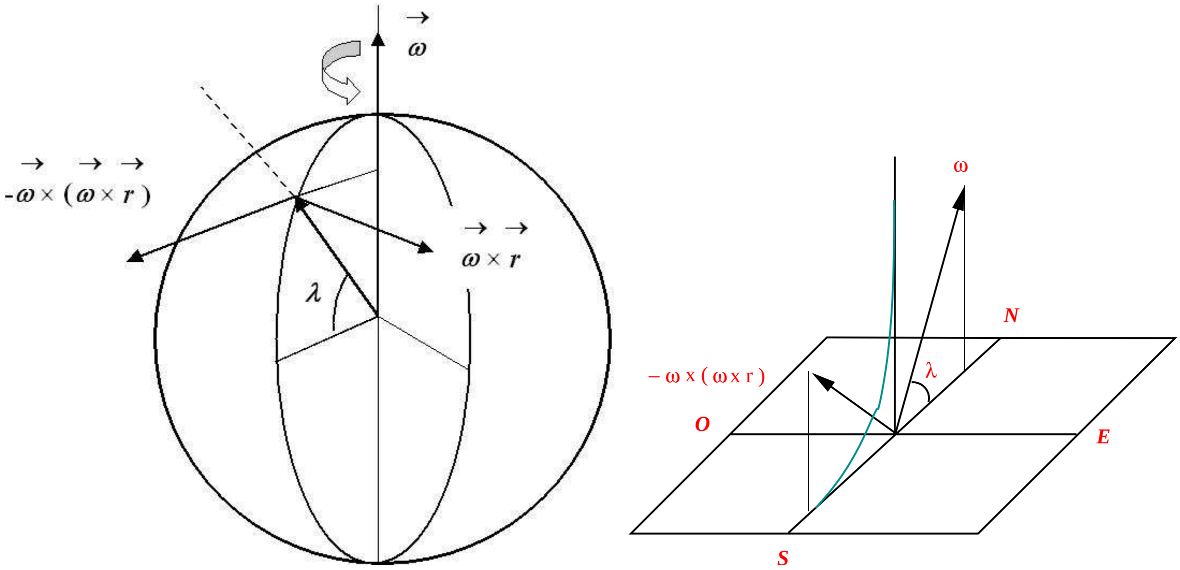
$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}\,' + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}$$

Aceleración de Coriolis: $2\,\vec{\omega} \times \vec{v}\,'$
Aceleración Centrípeta: $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

Ejemplo

◇ Efecto de la aceleración centrípeta sobre un cuerpo que cae en la superficie de la Tierra en un punto de latitud λ.

Sea $\vec{g}_0$ la aceleración debido a la gravedad dirigida hacia el centro de la Tierra medida por un observador que no gira. Si la velocidad es pequeña se puede suponer $\vec{\omega} \times \vec{v}\,' \simeq 0$



La aceleración medida por un observador en la superfiecie de la Tierra es:

$$\vec{g} = \vec{g}_0 - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

El término $-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ hace que el cuerpo no caiga vertical sino que se desvíe hacia el Sur (en el hemisferio Norte) o hacia el Norte (en el hemisferio Sur). Su valor absoluto vale (r es el radio de la Tierra $\simeq 6\ 10^6$ m):

$$|\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})| = \omega^2\, r\ \cos\lambda \simeq 3,34\ 10^{-2} \cos\lambda \text{ m s}^{-2}$$

Este valor es cero en los Polos y máximo en el Ecuador. La componente de esta aceleración en la dirección hacia el Sur es:

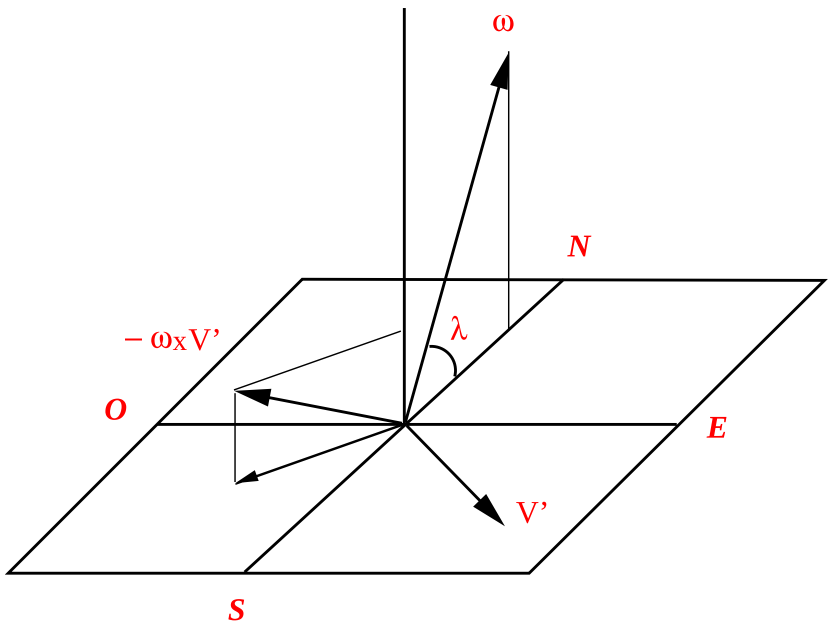
$$\omega^2\, r\ \cos\lambda\ \sin\lambda$$

mientras que la componente vertical es:

$$\omega^2\, r\ \cos^2\lambda$$

Ejemplo

◇ Efecto de la aceleración de Coriolis sobre un cuerpo que se mueve en la superficie de la Tierra en un punto de latitud λ.



Un cuerpo moviéndose con velocidad $\vec{v}\,'$ en la superficie de la Tierra (medida por un observador girando con la Tierra) sufre una aceleración $-2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'$ cuya componente horizontal hace que el cuerpo se desvíe hacia la derecha del movimiento (en el hemisferio Norte)