Cinemática

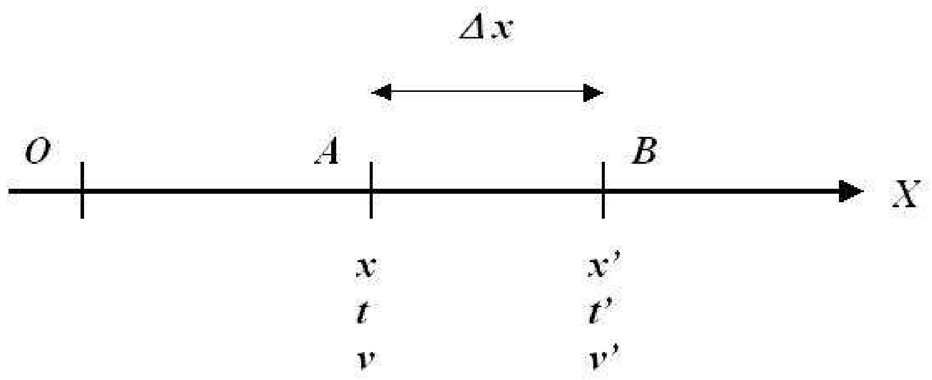
Un objeto se encuentra en *movimiento relativo* con respecto a otro cuando su posición relativa cambia con el tiempo. Si no es así está en *reposo relativo*. Ambos conceptos son relativos.

Para describir el movimiento de un objeto un observador define un *sistema de referencia*.

Si dos observadores provistos de diferentes sistemas de referencia están en movimiento relativo y estudian ambos el movimiento de un objeto, sus observaciones serán diferentes.

movimiento rectilíneo

El movimiento de un cuerpo es rectilíneo cuando su trayectoria es una recta.



La velocidad promedio cuando el cuerpo se desplaza de A a B se define como:

$$\bar{v} = \frac{x' - x}{t' - t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad [v] = LT^{-1}$$

La velocidad instantánea en el punto x de la trayectoria se define como:

$$v = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Para encontrar la velocidad instantánea se necesita conocer el desplazamiento x como función del tiempo t: $x = f(t)$.

Ejemplo

$\diamondsuit$ Una partícula se mueve según: $x = 5t^2+1$ m. (t en s.) Encontrar la velocidad promedio entre $t = 2$s. y 3s. Encontrar la velocidad instantánea en $t = 2$s.

$$\bar{v} = \frac{46-21}{3-2} = 25\mathrm{m/s}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 10t \qquad v(t=2) = 20\mathrm{m/s}$$

Si se conoce v como función de t: $v(t)$ y se conoce que en $t = t_0$ $x = x_0$:

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)dt \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

En general v es una función de t. Si es constante el movimiento es *uniforme*.

Se define la aceleración promedio:

$$\bar{a} = \frac{v'-v}{t'-t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad [a] = LT^{-2}$$

y la aceleración instantánea:

$$a = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

En general a depende de t. Si a es constante el movimiento es *uniformemente acelerado*.
Si se conoce a como función de t: $a(t)$ y se conoce que en $t = t_0$ $v = v_0$:

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a(t)dt \quad \Rightarrow \quad v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dt$$

Movimiento uniformemente acelerado:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + a(t-t_0) \\ x(t) &= x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2 \end{aligned}$$

Puede ocurrir que no se conozca a como función del tiempo t, sino como función de la posición x: $a = a(x)$. En este caso las integrales anteriores no se pueden resolver y hay que recurrir al siguiente cálculo:

$$dv = a(x)dt \quad \longrightarrow \quad vdv = a(x)vdt = a(x)dx$$

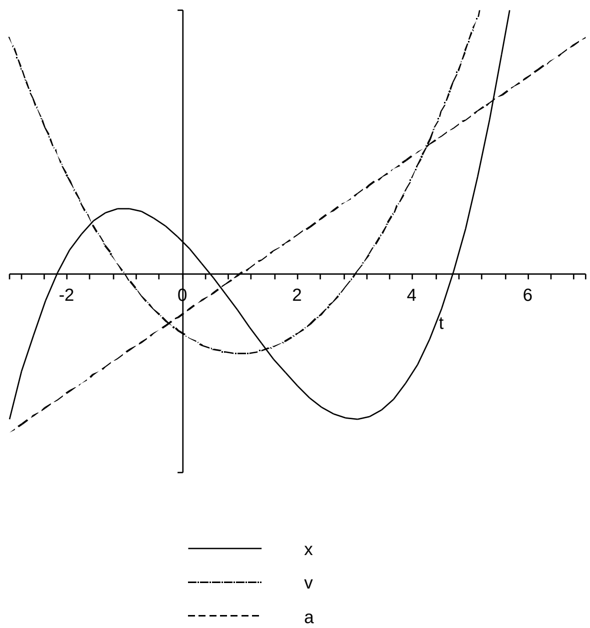
La condición inicial, en este caso, viene dada por: $v = v_0$ cuando $x = x_0$:

$$\int_{v_0}^{v} vdv = \int_{x_0}^{x} a(x)dx \quad \longrightarrow \quad v^2 = v_0^2 + 2\int_{x_0}^{x} a(x)dx$$

Ejemplo

◇ Una partícula se desplaza a lo largo del eje X según la ley: $x(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 5$ Encontrar v y a como función del tiempo y describir el movimiento.

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t - 9 \qquad a = \frac{dv}{dt} = 6t - 6$$

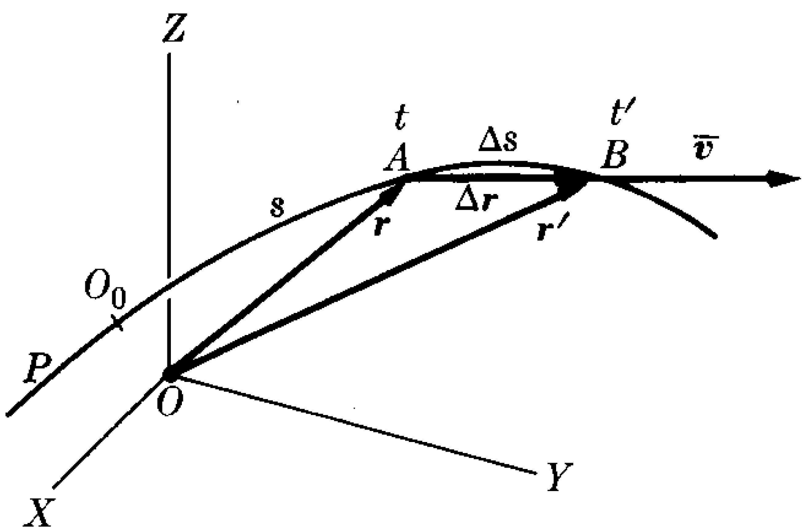


Para $t < -1$ la velocidad es positiva y el movimiento es en la dirección positiva del eje X. Cuando $t = -1$ la velocidad es cero. Para $-1 < t < 3$ la velocidad es negativa y el movimiento es en la dirección negativa del eje X. Cuando $t = 3$ la velocidad es, otra vez, cero. Finalmente para $t > 3$ la velocidad es positiva y el movimiento es en la dirección positiva del eje.

---

movimiento curvilíneo

Sea una partícula que se mueve en el espacio describiendo una trayectoria curvilínea P.



En el instante t la partícula se encuentra en el punto A con vector posición $\vec{r}$ y en el instante t' se encuentra en B con vector posición $\vec{r}\,'$. En ese lapso de yiempo ha recorrido una distancia Δs a lo largo de la trayectoria. Se define el *desplazamiento* como:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}\,' - \vec{r} = (x_B - x_A)\,\vec{u}_x + (y_B - y_A)\,\vec{u}_y + (z_B - z_A)\,\vec{u}_z = \Delta x\,\vec{u}_x + \Delta y\,\vec{u}_y + \Delta z\,\vec{u}_z$$

' La velocidad promedio se define como:

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\,\vec{u}_x + \frac{\Delta y}{\Delta t}\,\vec{u}_y + \frac{\Delta z}{\Delta t}\,\vec{u}_z$$

En este caso la velocidad promedio es un vector.

La velocidad instantánea se define como el límite:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\,\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\,\vec{u}_z$$

$\vec{v}$ coincide con la dirección tangente a la trayectoria en el punto A.

El límite anterior se podía haber calculado de diferente forma. Si se toma un origen O_0 a partir del cual se miden las distancia recorridas, entonces:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \left(\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right) \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right)$$

Si $\Delta t \longrightarrow 0, \quad \Delta s \longrightarrow 0$ y $|\Delta \vec{r}| \sim \Delta s$. Es decir:

$$\left| \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right| = 1$$

$\Delta \vec{r}$, en el límite, tiene la dirección de la tangente a la trayectoria en el punto A:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \vec{u}_T$$

donde $\vec{u}_T$ es un vector unitario tangente a la trayectoria en cada punto.

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\,\vec{u}_T = v\,\vec{u}_T$$

Lo mismo que antes, se define la aceleración promedio:

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

y la aceleración instantánea:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\,\vec{u}_x + \frac{dv_y}{dt}\,\vec{u}_y + \frac{dv_z}{dt}\,\vec{u}_z$$

El movimiento es uniformemente acelerado cuando el vector aceleración es constante (módulo y dirección).

movimiento uniformemente acelerado

Si $\vec{a}$ es constante:

$$d\vec{v} = \vec{a}dt \quad \Rightarrow \quad \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}dt$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\,(t - t_0)$$

y la trayectoria es:

$$d\vec{r} = \vec{v}dt \quad \Rightarrow \quad \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}dt$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\,(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}\,(t - t_0)^2$$

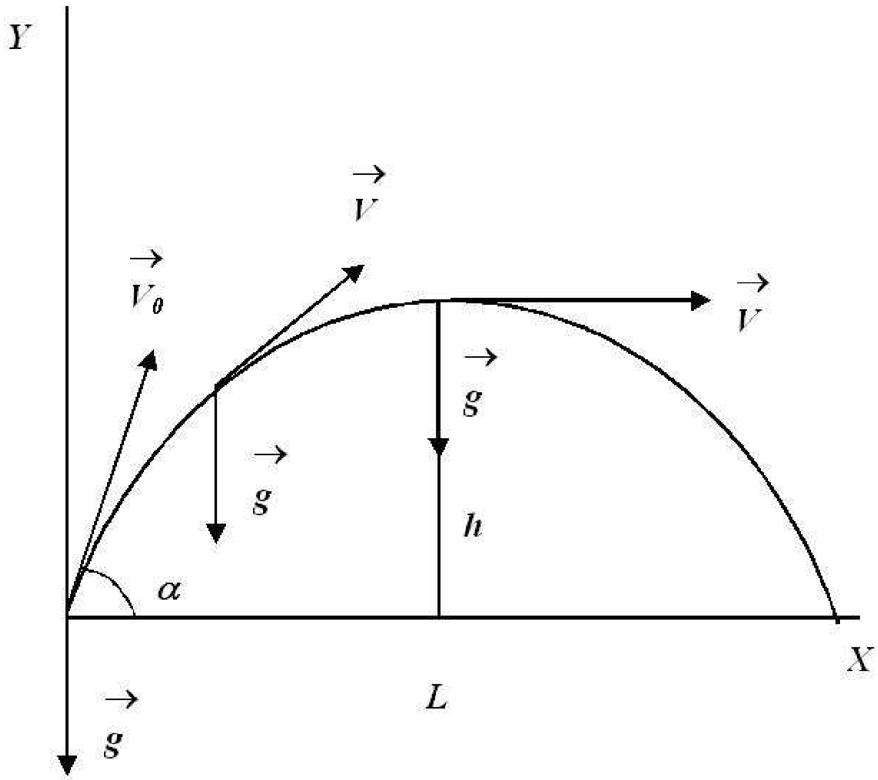
Es interesante señalar lo siguiente:

♠ En general $\vec{v}_0$ y $\vec{a}$ no tienen la misma dirección, por lo tanto $\vec{v}$ no tiene por que ser paralelo a $\vec{a}$.

♠ $\vec{v}_0$ y $\vec{a}$ son vectores constantes. $\vec{r} - \vec{r}_0$ está siempre en el plano definido por los vectores $\vec{v}_0$ y $\vec{a}$. Luego el movimiento tiene lugar en un plano.

♠ Una de las aplicaciones más interesantes de estas ecuaciones es el movimiento de un proyectil: *movimiento parabólico* movimiento parabólico

Se lanza un proyectil con velocidad inicial $\vec{v}_0$ que forma un ángulo α con la horizontal. En este caso $\vec{a} = \vec{g}$. Se toma el plano XY coincidente con el formado por $\vec{v}_0$ y $\vec{a}$.



$$\vec{a} = \vec{g} = -g\,\vec{u}_y, \qquad \vec{v}_0 = v_{0_x}\vec{u}_x + v_{0_y}\vec{u}_y \quad \begin{cases} v_{0_x} = v_0\ \cos\alpha \\ v_{0_y} = v_0\ \sin\alpha \end{cases}$$

Las condiciones iniciales son: $\vec{r}_0 = 0$ y $t_0 = 0$. Usando las expresiones para el movimiento uniformemente acelerado:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}\,t \qquad \begin{cases} v_x = v_0\ \cos\alpha \\ v_y = v_0\ \sin\alpha - g\,t \end{cases}$$

$$\vec{r} = \vec{v}_0\,t + \frac{1}{2}\,\vec{g}\,t^2 \qquad \begin{cases} x = v_0\ \cos\alpha\,t \\ y = v_0\ \sin\alpha\,t - \frac{1}{2}g\,t^2 \end{cases}$$

Para encontrar la trayectoria, se elimina t en las expresiones anteriores:

$$y(x) = x\ \tan\alpha - \frac{x^2}{2\cos^2\alpha}\, g$$

que es la ecuación de una parábola.

Altura máxima h: en ese punto $v_y = 0$:

$$v_y = 0 \quad \Rightarrow \quad t_h = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \quad \Rightarrow \quad h = y(t_h) = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

Distancia horizontal total: En el punto donde el proyectil vuelve a la superficie es donde $y = 0$:

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad t(v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2}gt) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_L = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

Este tiempo es el doble que el anterior: $t_L = 2t_h$.

$$L = x(t_L) = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\ \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Ejemplo

♢ Un proyectil fue disparado haciendo un ángulo de 35^0 con la horizontal. El alcance fue de 4Km. a) Encontrar la velocidad inicial. b) Hallar el tiempo de vuelo. c) Encontrar la altura máxima y la velocidad en la altura máxima. $(g = 10m/s^2)$

a)

$$L = 4000 = \frac{v_0^2 \sin 70^0}{g} \qquad v_0 \simeq 206m/s$$

b)

$$t_L = \frac{2v_0 \sin 35^0}{g} \simeq 23,6s$$

c)

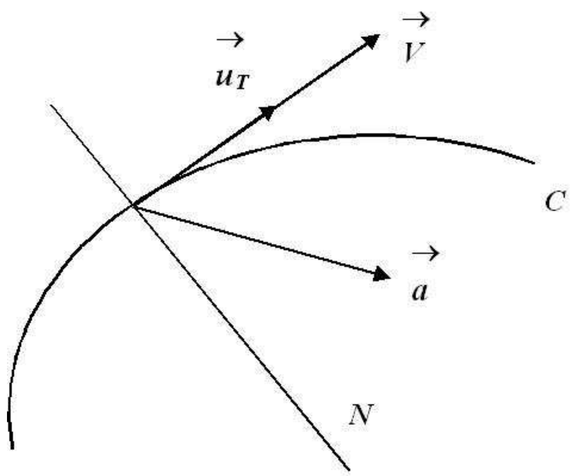
$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \simeq 698m, \qquad v_y = 0, \quad v_x = v_0 \cos\alpha \simeq 169m/s$$

Componentes tangencial y normal de la aceleración

La aceleración es debida a un cambio de la velocidad. Este cambio puede ser debido a una variación del módulo del vector velocidad, a un cambio de la dirección de la velocidad o a ambos a la vez (caso más general).

- ♠ Solo cambia la magnitud: Mov. rectilíneo
- ♠ Solo cambia la dirección: Mov. circular

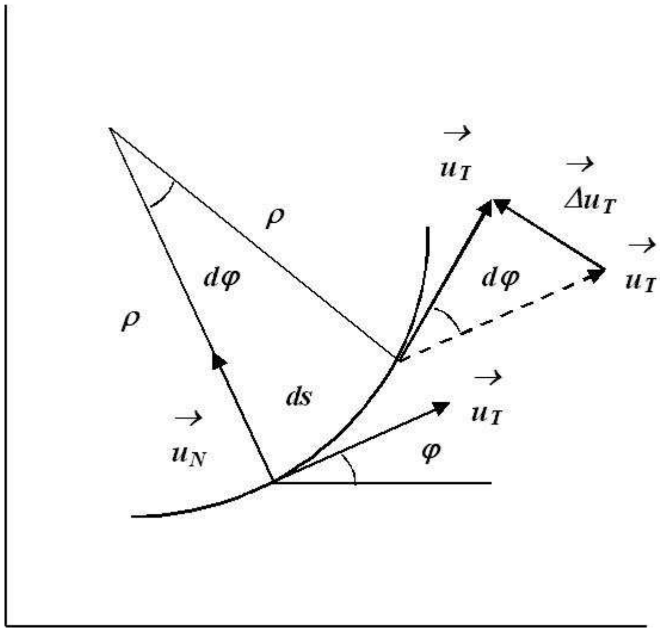
$\vec{v} = v\,\vec{u}_T$



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\vec{u}_T + v\,\frac{d\vec{u}_T}{dt}$$

Si el movimiento es rectilíneo $\quad \dfrac{d\vec{u}_T}{dt} = 0$

$$\vec{u}_T \cdot \vec{u}_T = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{u}_T}{dt} \cdot \vec{u}_T = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{u}_T}{dt} \perp \vec{u}_T$$



$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{u}_T}{\Delta t}$$

$\Delta \vec{u}_T$ está dirigido hacia el lado cóncavo de la trayectoria, además es perpendicular a $\vec{u}_T$, es decir lleva la dirección de $\vec{u}_N$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}_T = \cos\varphi\, \vec{u}_x + \sin\varphi\, \vec{u}_y \\ \vec{u}_N = -\sin\varphi\, \vec{u}_x + \cos\varphi\, \vec{u}_y \end{array}\right\} \quad \vec{u}_T \cdot \vec{u}_N = 0$$

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = -\sin\varphi\, \frac{d\varphi}{dt}\, \vec{u}_x + \cos\varphi\, \frac{d\varphi}{dt}\, \vec{u}_y = \frac{d\varphi}{dt}\, \vec{u}_N$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{ds}\, \frac{ds}{dt} = v\, \frac{d\varphi}{ds}$$

$$ds = \rho\, d\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

Juntando estos resultados:

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{v}{\rho}\, \vec{u}_N$$

ρ: *radio de curvatura*

Resumiendo:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\vec{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\,\vec{u}_N$$

$$\boxed{\begin{aligned} \text{aceleración tangencial}: \quad a_T &= \frac{dv}{dt} \\ \text{aceleración normal}: \quad a_N &= \frac{v^2}{\rho} \end{aligned}}$$

$$a^2 = a_T^2 + a_N^2$$

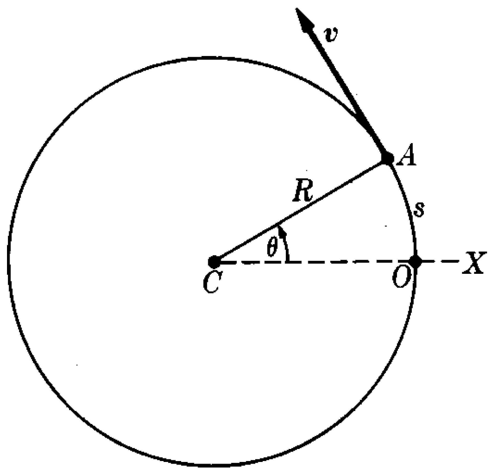
Movimiento circular

Consideremos el caso particular en el que la trayectoria es un círculo. Esto es, *movimiento circular*

$$s = R\theta$$

$$v = \frac{ds}{dt} = R\,\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad [\omega] = T^{-1}$$



ω es la *velocidad angular*.

La aceleración tangencial y normal son:

$$\begin{aligned} a_T &= \frac{dv}{dt} = R\,\frac{d\omega}{dt} = R\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = R\,\alpha \\ a_N &= \frac{v^2}{R} = \omega^2\,R \end{aligned}$$

donde α es la *aceleración angular* ($[\alpha] = T^{-2}$).

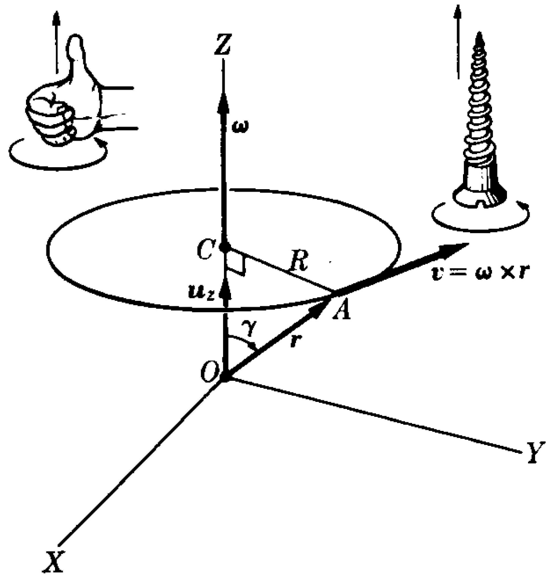
Si $\alpha = 0$ el movimiento es *circular uniforme*:

$$a_T = 0 \qquad\qquad a_N = \omega^2\,R$$

ω puede expresarse como un vector:

$$v = R\omega = r\omega \sin\gamma$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



Esto solo es válido para r y γ constantes.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

Si el movimiento es circular uniforme:

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

En el movimiento circular uniforme el movimiento es periódico y la partícula pasa por cada punto de la circunferencia a intervalos regulares:

$$d\theta = \omega\ dt \quad \rightarrow \quad \int_0^\theta d\theta = \int_0^t \omega\ dt \quad \rightarrow \quad \theta = \omega\ t$$

El *período* es el tiempo necesario para dar una vuelta completa:

$$2\pi = \omega\ P \qquad \rightarrow \qquad P = \frac{2\pi}{\omega}$$

Si ω no es constante, pero la aceleración angular α es constante y cuando $t = t_0$ $\omega = \omega_0$ y $\theta = \theta_0$:

$$d\omega = \alpha\ dt \quad \longrightarrow \quad \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^{t} \alpha\ dt \quad \longrightarrow \quad \omega = \omega_0 + \alpha\ (t - t_0)$$

$$d\theta = \omega\ dt \quad \longrightarrow \quad \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega\ dt \quad \longrightarrow \quad \theta = \theta_0 + \omega_0\ (t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha\ (t - t_0)^2$$

Ejemplo

◇ Encontrar la velocidad y la aceleración de un punto sobre la superficie de la Tierra en función de su latitud.

Todos los puntos sobre la Tierra giran a la misma velocidad angular:

$$\omega = \frac{2\pi}{1\ \text{día}} = \frac{2\pi}{86400\ \text{seg.}} \simeq 7,2\ 10^{-5}\ \text{s}^{-1}$$

Un punto con latitud λ describe un círculo de radio R:

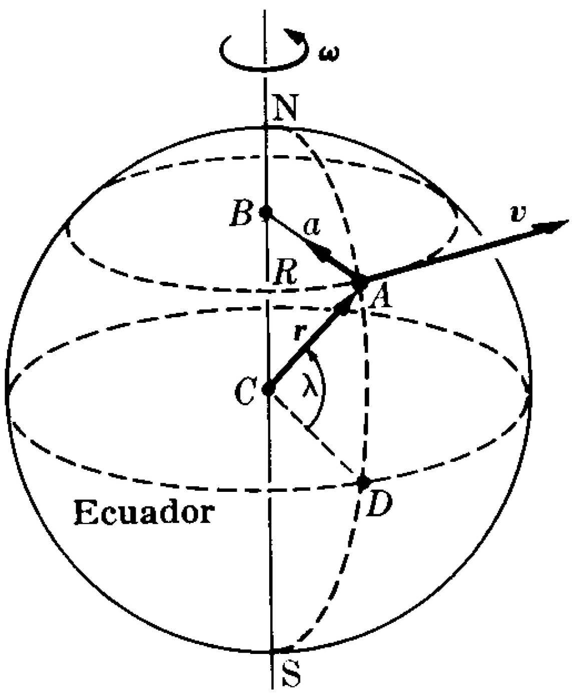
$$R = r\cos\lambda$$

La velocidad es paralela al ecuador:

$$v = \omega R = \omega r\cos\lambda$$

Como ω es constante la aceleración es normal y está dirigida hacia el eje de la Tierra, hacia el punto B:

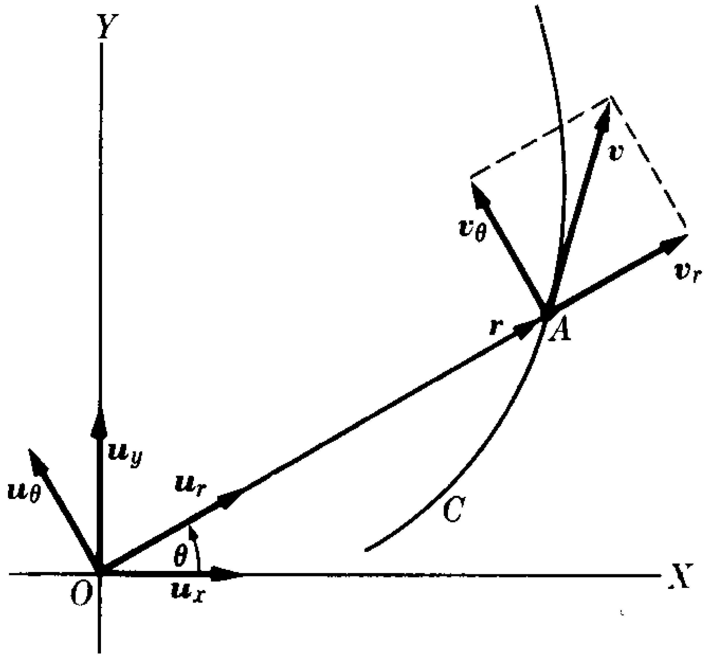
$$a = \omega^2 R = \omega^2 r\cos\lambda$$



Movimiento en un plano

Cuando el movimiento tiene lugar en un plano se puede descomponer el vector velocidad en una forma similar a la que se hizo para el vector aceleración.

$\vec{r} = r\,\vec{u}_r$



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{u}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{u}_x + \sin\theta\,\vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y \end{array}\right\} \quad \vec{u}_r \cdot \vec{u}_\theta = 0$$

Derivando:

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = -\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}\,\vec{u}_y = \frac{d\theta}{dt}\,\vec{u}_\theta$$

La primera parte se denomina velocidad radial y la segunda velocidad transversal:

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{dr}{dt} \\ v_\theta &= r\,\frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$