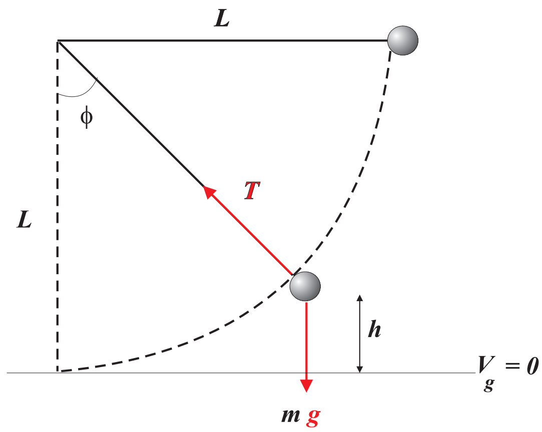
Soluciones

Problema 1



La ecuación de Newton es:

$$m\,\vec{a} = m\,\vec{g} + \vec{T} \tag{1}$$

Descomponiendo esta ecuación en las componentes tangencial y normal:

$$m\,a_n = T - m\,g\,\cos\phi \tag{2}$$

$$m\,a_T = m\,\sin\phi \tag{3}$$

El punto que hay que calcular es aquel que verifica que $T = mg$:

$$m\,a_n = m\,\frac{v^2}{L} = m\,g - m\,g\,\cos\phi \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{L} = g - g\,\cos\phi \tag{4}$$

Para calcular v^2 hacemos uso de la conservación de la energía. Como la tensión es perpendicular al desplazamiento, su contribucución al trabajo es cero. Solo hay que tener en cuenta la fuerza gravitatoria, que es conservativa. Tomamos el cero de la energía potencial gravitatoria en la parte inferior del recorrido de la masa. La conservación de la energía entre el punto superior y el punto que pide el problema, se escribe:

$$m\,g\,L = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + m\,g\,h = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + m\,g\,(L - L\,\cos\phi), \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{L} = 2\,g\,\cos\phi \tag{5}$$

Sustituyendo en (4):

$$2\,g\,\cos\phi = g - g\,\cos\phi, \quad \Rightarrow \quad \cos\phi = \frac{1}{3}, \quad \phi \approx 70^0\,32' \tag{6}$$

Problema 2

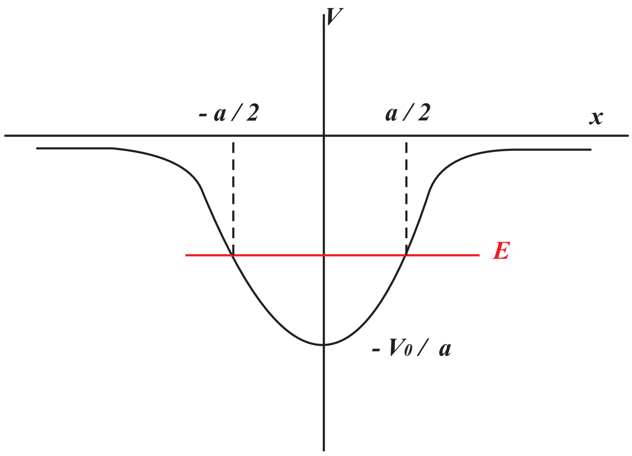
a) La fuerza viene dada por:

$$F(x) = -\frac{dV}{dx} = \frac{V_0\,x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \tag{7}$$

b) Para representar el potencial calculamos primero los máximos y los mínimos:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{V_0\,x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = 0, \quad \Rightarrow \quad x = 0 \tag{8}$$

Mediante la derivada segunda, se ve facilmente que este punto es un mínimo. No hay puntos de corte con el eje y, además, V es siempre negativa. Cuando $x \to \pm\infty$ la función V tiende a cero. Por tanto la representación gráfica es:



c) El único punto de equilibrio es $x = 0$ que al ser un mínimo es un punto de equilibrio estable.

d) Si la partícula se necuentra en el punto $x = a/2$ con velocidad cero, significa que en ese punto la energía cinética de la partícula es solo potencial. La energía total, por tanto, es:

$$E = T + V = V(x = a/2) = \frac{-2V_0}{a\sqrt{5}} \tag{9}$$

Su velocidad en $x = 0$ es

$$E = \frac{-2V_0}{a\sqrt{5}} = T + V(x = 0) = \frac{1}{2}m\,v^2 - \frac{V_0}{a} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2V_0}{ma}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)} \tag{10}$$

El movimiento de la partícula con esta energía será oscilatorio entre los puntos $x = -a/2$ y $x = a/2$ que son puntos de retroceso.