Soluciones

Problema 1

a) La aceleración tangencial y normal para el movimiento circular son:

$$a_T = R\frac{d\omega}{dt} = R\,4\,t \;\; m/sg, \tag{1}$$
$$a_N = \omega^2 R = 4\,t^4 R = 8\,t^4 \;\; m/sg^2 \tag{2}$$

El valor del ángulo se obtiene integrando la velocidad angular:

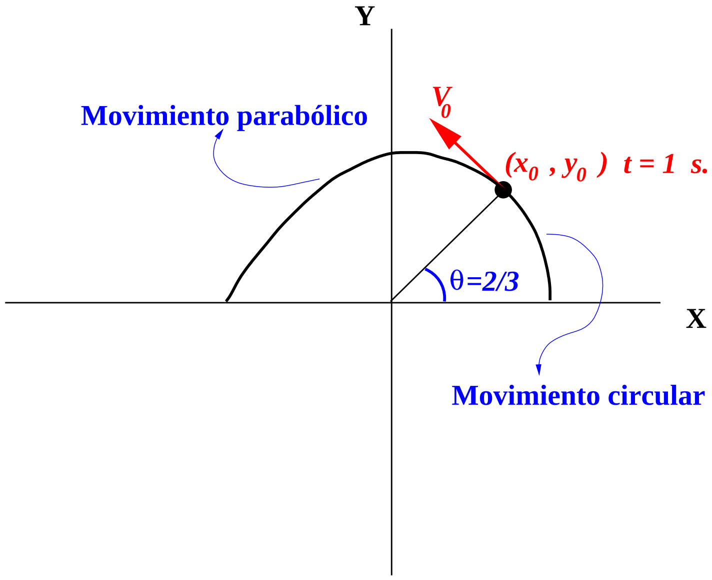
$$\int_0^\theta d\theta = \int_0^t \omega(t)\,dt = \int_0^t 2t^2\,dt, \qquad \theta(t) = \frac{2}{3}t^3 \tag{3}$$

La aceleración angular es:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 4\,t \;\; sg^{-2} \tag{4}$$

luego el movimiento no es uniformemente acelerado.

b)



A partir de $t = 1\,s$ el movimiento deja de ser circular y pasa a ser uniformemente acelerado; es decir la trayectoria es una parábola. Para describir este movimiento necesitamos las condiciones iniciales; éstas vienen dadas por los valores de $\vec{r}$ y $\vec{v}$ obtenidos en el apartado anterior y calculados cuando $t = 1\,s$. El ángulo en ese tiempo es $\theta = 2/3$ y la posición inicial es:

$$x_0 = R\,\cos(2/3) = 2\,\cos(2/3)\;\; m \qquad y_0 = R\,\sin(2/3) = 2\,\sin(2/3)\;\; m \tag{5}$$

La velocidad $\vec{v}_0$ se puede calcular teniendo en cuenta que en el movimiento circular el módulo de la velocidad es $R\omega$. En $t = 1$ es $v_0 = 4\,m/s$. Las componentes pueden ser calculadas sabiendo que $\vec{v}_0$ es tangente a la circunferencia y, por tanto, perpendicular al radio. También puede ser calculando usando la ecuación que da el vector velocidad en el movimiento circular: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. En este caso el vector $\vec{\omega}$ es un vector en la dirección positiva del eje Z: $\vec{w} = (0, 0, \omega) = (0, 0, 2t^2)$. El vector velocidad en cualquier instante de tiempo (en el movimiento circular) es:

$$\vec{v} = \omega \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & 2t^2 \\ R\cos\theta & R\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = -R\omega\sin\theta\,\vec{u}_x + R\omega\cos\theta\,\vec{u}_y \tag{6}$$

En $t = 1\,s$ lo anterior da:

$$\vec{v}_0 = -4\,\sin(2/3)\,\vec{u}_x + 4\,\cos(2/3)\,\vec{u}_y\;\; m/s \tag{7}$$

Una vez que se conocen la posición y la velocidad inicial, escribimos las ecuaciones de la posición y de la velocidad para un movimiento uniformemente acelerado:

$$\vec{v} \;=\; \vec{v}_0 + \vec{a}\,(t - t_0) \tag{8}$$

$$\vec{r} \;=\; \vec{r}_0 + \vec{v}_0\,(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}\,(t - t_0)^2 \tag{9}$$

siendo $t_0 = 1$. Sustituyendo los valores de las condiciones iniciales, las ecuaciones anteriores, componente a componente, son:

$$v_x \;=\; -4\,\sin(2/3) \qquad v_y = 4\,\cos(2/3) - 10\,(t - 1) \tag{10}$$

$$x \;=\; 2\,\cos(2/3) - 4\,\sin(2/3)\,(t - 1) \tag{11}$$

$$y \;=\; 2\,\sin(2/3) + 4\,\cos(2/3)\,(t - 1) - 5\,(t - 1)^2 \tag{12}$$

La partícula alcanza la coordenada y máxima en el instante en que $v_y = 0$, es decir cuando

$$t - 1 = \frac{2}{5}\,\cos(2/3) \tag{13}$$

En este instante la coordenada y vale:

$$y = 2\,\sin(2/3) + \frac{8}{5}\,\cos^2(2/3) - \frac{2}{5}\,\cos^2(2/3) = 2\,\sin(2/3) + \frac{4}{5}\,\cos^2(2/3) \approx 1,72\,m \tag{14}$$

que es la altura máxima de la trayectoria.

En $y = 0$ el tiempo vale:

$$t - 1 = \frac{2}{5}\cos(2/3) + \frac{1}{5}\sqrt{4\cos^2(2/3) + 10\sin(2/3)} \approx 0,90\,s \tag{15}$$

donde se ha considerado solo la solución con signo + ya que la solución con signo - da un valor negativo para $t - 1$. Sustituyendo este valor en (11) se obtiene la coordenada x:

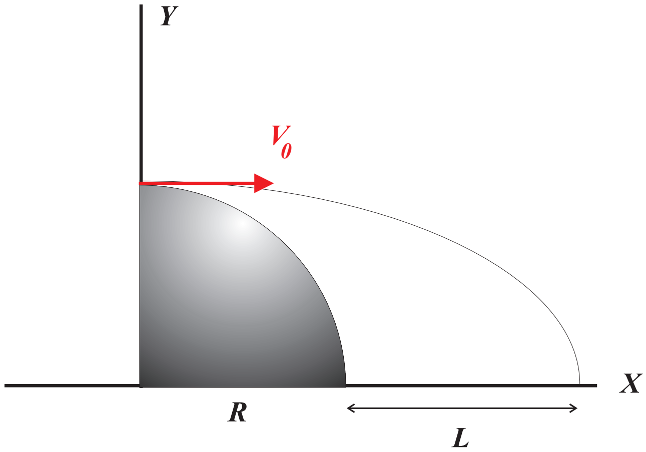
$$x = 2\cos(2/3) - 4\sin(2/3)\,(t-1) \approx -0,65\,m \tag{16}$$

y sustiuyendolo en (10) se obtiene el valor de la velocidad:

$$v_x = -4\sin(2/3) \approx -2,47\,m/s. \qquad v_y = 4\cos(2/3) - 10\,(t-1) \approx -5,85\,m/s. \tag{17}$$

Problema 2

Tomamos un sistema de referencia centrado en el centro de la roca semiesférica:



Primero calculemos la trayectoria del objeto lanzado desde la roca. Las condiciones iniciales son:

$$\vec{r}_0 = R\,\vec{u}_y, \qquad \vec{v}_0 = v_0\,\vec{u}_x \tag{18}$$

Las ecuaciones para la velocidad y la posición son:

$$v_x = v_0, \quad v_y = -gt, \quad x = v_0 t, \quad y = R - \frac{1}{2}gt^2 \tag{19}$$

La ecuación de la trayectoria se obtiene eliminando t de las ecuaciones de x e y:

$$y(x) = R - \frac{gx^2}{2v_0^2} \tag{20}$$

Si el objeto impacta contra la roca antes de llegar al suelo significa que su trayectoria se cruza con la superficie de la roca y que, por tanto, hay un punto de la ecuación de la trayectoria (aparte del punto de inicio $(0, R)$) que verifica también la ecuación de superficie de la roca:

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{21}$$

Es decir, si impacta contra la roca el sistema de ecuaciones (20) y (21) tiene una solución que es:

$$y^2 = R^2 - x^2 = R^2 + \frac{g^2x^4}{4v_0^4} - \frac{gx^2}{v_0^2}R \tag{22}$$

De aquí se obtiene:

$$x^2 = \frac{4v_0^4}{g^2}\left(\frac{gR}{v_0^2} - 1\right) \tag{23}$$

Si el objeto no impacta contra la roca, el sistema (20), (21) no tiene solución. Esto ocurrirá cuando en la ecuación anterior se verifique que:

$$\frac{gR}{v_0^2} - 1 < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad v_0^2 > gR \tag{24}$$

La velocidad mínima es $v_0 = \sqrt{gR}$.

Con esa velocidad mínima, la coordenada x al llegar al suelo es (de (20)):

$$0 = R - \frac{x^2}{2R} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \sqrt{2}\,R \tag{25}$$

y la distancia a la base de la roca es:

$$L = \sqrt{2}\,R - R \tag{26}$$