Soluciones

Problema 1

Definimos los ejes tal que el eje X coincida con la superficie de la tierra y el eje Y esté a lo largo de la vertical. El origen lo situamos en el punto en el que se lanza el objeto. Por tanto las condiciones iniciales son

$$t = 0, \qquad \vec{r}_0 = \vec{0}, \qquad \vec{v}_0 = 20\,\vec{u}_y\ m/s \tag{1}$$

a) El vector aceleración es:

$$\vec{a} = 2\,\vec{u}_x - 10\,\vec{u}_y\ m/s^2 \tag{2}$$

donde hemos supuesto $g = 10m/s^2$. Integramos cada una de las componentes para encontrar la velocidad:

$$\begin{aligned} \int_0^{v_x} dv_x &= \int_0^t a_x\,dt = \int_0^t 2\,dt \quad \longrightarrow \quad v_x = 2t\ m/s \\ \int_{20}^{v_y} dv_y &= \int_0^t a_y\,dt = -\int_0^t 10\,dt \quad \longrightarrow \quad v_y = 20 - 10t\ m/s \end{aligned} \tag{3}$$

Es decir:

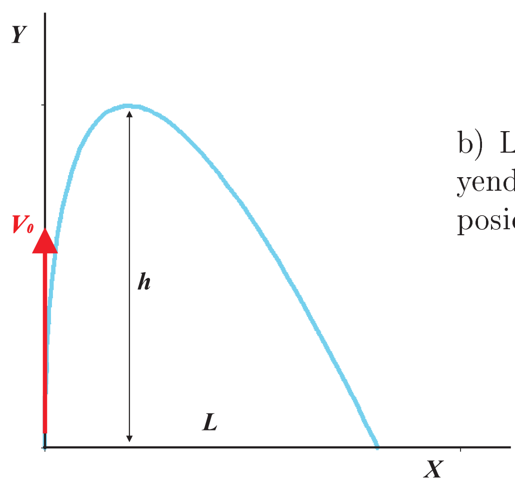
$$\vec{v} = 2t\,\vec{u}_x + (20 - 10t)\,\vec{u}_y\ m/s \tag{4}$$

Calculamos ahora el vector posición integrando de nuevo las componentes de la velocidad:

$$\begin{aligned} \int_0^{x} dx &= \int_0^t v_x\,dt = \int_0^t 2t\,dt \quad \longrightarrow \quad x = t^2\ m \\ \int_0^{y} dy &= \int_0^t v_y\,dt = \int_0^t (20 - 10t)\,dt \quad \longrightarrow \quad y = 20t - 5t^2\ m \end{aligned} \tag{5}$$

Escribiendo en forma vectorial el resultado anterior:

$$\vec{r} = t^2\,\vec{u}_x + (20t - 5t^2)\,\vec{u}_y\ m \tag{6}$$



b) La ecuación de la trayectoria se obtiene sustituyendo t en las ecuaciones de las componentes de la posición:

$$t = \sqrt{x} \qquad \Rightarrow \qquad y(x) = 20\sqrt{x} - 5x \tag{7}$$

c) En el punto de altura máxima $v_y = 0$. El tiempo que tarda en llegar a ese punto es:

$$v_y = 20 - 10t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = 2\ s \tag{8}$$

y la altura h que alcanza el objeto es:

$$h = y(t = 2) = 20\ m \tag{9}$$

El alcance máximo se obtiene imponiendo que $y = 0$:

$$y = 20t - 5t^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = 0, \quad t = 4\ s \tag{10}$$

Como la solución $t = 0$ corresponde a la condición inicial $t = 0, y = 0$, la solución que nos interesa es la segunda. El acance máximo L es:

$$L = x(t = 4) = 16\ m \tag{11}$$

Problema 2

a) La velocidad viene dada por:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -6\ \sin(2t)\,\vec{u}_x - 6\ \cos(2t)\,\vec{u}_y + \sqrt{13}\,\vec{u}_z \tag{12}$$

El módulo de la velocidad es:

$$v^2 = 36\ \sin^2(2t) + 36\ \cos^2(2t) + 13 = 36 + 13 = 49, \quad \Rightarrow \quad v = 7 \tag{13}$$

La aceleración es:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -12\ \cos(2t)\,\vec{u}_x + 12\ \sin(2t)\,\vec{u}_y \tag{14}$$

y su módulo es:

$$a^2 = 144\ \cos^2(2t) + 144\ \sin^2(2t) = 144, \quad \Rightarrow \quad a = 12 \tag{15}$$

La componente tangencial de la aceleración es:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \tag{16}$$

y la componente normal:

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} = \frac{49}{\rho} \tag{17}$$

b)Para encontrar el radio de curvatura usamos el módulo de la aceleración:

$$a^2 = a_T^2 + a_N^2 = a_N^2, \qquad \Rightarrow \qquad a = a_N \tag{18}$$

Sustituyendo:

$$12 = \frac{49}{\rho} \qquad \Rightarrow \qquad \rho = 49/12 \tag{19}$$