Soluciones

Problema 1

a)

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 12\,t - 9\,t^2 + 6 \tag{1}$$

b) Los dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero. Igualando a cero el resultado anterior:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 = 12\,t - 9\,t^2 + 6 \qquad \Rightarrow \qquad t = 1,72 \quad t = -0,38 \tag{2}$$

Si los vectores son paralelos significan que llevan la misma dirección, es decir $\vec{a} = \lambda\vec{b}$; donde λ es una constante. Desarrollando esta ecuación:

$$2t = 6\lambda, \qquad 3t^2 = -3\lambda, \qquad 6 = \lambda \tag{3}$$

La última ecuación fija el valor de lambda, $\lambda = 6$. De la primera se obtiene $t = 18$. Sustituyendo ambos valores en la segunda ecuación se comprueba que ésta no se verifica. Es decir, no hay valores de t para los que los dos vectores son paralelos.

Otra forma de obtener este resultado es mediante el producto vectorial. Si los dos vectores son paralelos el producto vectorial es cero:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ 2t & 3t^2 & 6 \\ 6 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (3t^2+18)\vec{u}_x + (36-2t)\vec{u}_y + (-6t-18t^2)\vec{u}_z = 0 \tag{4}$$

Igualando a cero cada una de las componentes de este vector es fácil ver que no existe ningún valor de t que anule las tres componentes a la vez. Es decir, los dos vectores nunca son paralelos.

c) Para encontrar el ángulo α que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se calcula el producto escalar:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 12t - 9t^2 + 6 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = \sqrt{4t^2+9t^4+36}\sqrt{46}\cos\alpha \tag{5}$$

y de aquí:

$$\cos\alpha = \frac{12t-9t^2+6}{\sqrt{4t^2+9t^4+36}\sqrt{46}} \tag{6}$$

Sustituyendo los diversos valores de t, se obtiene: $t = 1$, $\alpha \simeq 79^0$; $t = 2$, $\alpha \simeq 93^0$ y finalmente $t = 3$, $\alpha \simeq 101^0$.

d) El módulo del vector $\vec{a}$ es:

$$|\vec{a}| = \sqrt{4t^2+9t^4+36} \tag{7}$$

Para $t = 1, 2, 3$ se obtiene $|\vec{a}| = 7, 14$ y 28,3 respectivamente.

e) La ecuación del plano viene dada por $(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ donde $\vec{r}_0$ es el vector de componentes (0,-3,2) y $\vec{r}$ es un vector de componentes (x, y, z). El producto vectorial de ambos vectores viene dado en la ecuación (4). La ecuación del plano es:

$$x(3t^2 + 18) + (y + 3)(36 - 2t) - (z - 2)(6t + 18t^2) = 0 \tag{8}$$

f) El producto vectorial viene dado por la ecuación (4). Para $t = 1, 2, 3$ se obtiene: (21, 34, -24); (30, 32, -84); (45, 30, -180).

g) Derivando:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = 2\vec{u}_x + 6t\vec{u}_y. \tag{9}$$

Problema 2

La definición de gradiente es:

$$\vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,\vec{u}_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,\vec{u}_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,\vec{u}_z \tag{10}$$

La derivada parcial con respecto a x viene dada por:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{1}{2}\,\frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \tag{11}$$

De la misma forma obtenemos las derivadas con respecto a y y z:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{1}{2}\,\frac{2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{1}{2}\,\frac{2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \tag{12}$$

Juntando estos resultados:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\Phi &= -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\vec{u}_x - \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\vec{u}_y - \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\vec{u}_z = \\ &= -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z) = -\frac{1}{r^3}\,\vec{r} \end{aligned} \tag{13}$$

La divergencia de un campo vectorial $\vec{A}$ es:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{14}$$

Teniendo en cuenta (10):

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\Phi) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \tag{15}$$

Es decir, hay que calcular la derivada con respecto a x de (11), la derivada con respecto a y de la primera expresión de (12) y la derivada con respecto a z de la segunda expresión de (12):

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3}{2}\frac{2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3}{2}\frac{2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{3}{2}\frac{2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \tag{18}$$

Finalmente:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\Phi) = -\frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + 3\,\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 0 \tag{19}$$