Atala V
Karakteristiken metodoa

17 Lehen ordenako ekuazioak

17.1 Problemaren agerpena

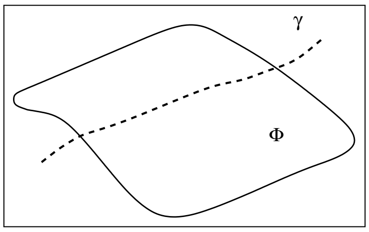
Problema

$$F(x, y, z, z_x, z_y) = 0$$

eta *datua* (baldintza)

$$\gamma := (x(t), y(t), z(t)) .$$

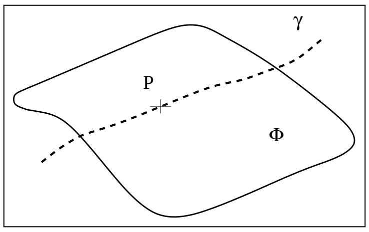
Soluzioa: *ekuazioaren* soluzioak $\phi(x, y, z)$ gainazalak dira; problemaren soluzioak: ekuazioaren soluzioak diren gainazalak eta γ gainazalean murgilduta.



17.2 Soluzioaren datuaren inguruko garapena

Datuaren inguruko garapena

Datua eta soluzioa erregularrak izanez gero, gainazalak onartu behar du puntu baten inguruko Taylor-en garapena, garapen hori *datuak eta ekuazioak guztiz zehaztua*.



Garapena

Hau da,

$$z(x, y) = z(P) + z_x(P)(x - x_0) + z_y(P)(y - y_0) + \dots$$

($P = (x_0, y_0)$), eta $z_x(P)$, $z_y(P)$ γ-k eta F-k zehaztuak.

P puntua γ datuaren gainean $\Rightarrow$ $\dot{z} = z_x(P)\dot{x} + z_y(P)\dot{y}$.

Butxadurarik ez badago ekuazioa erabiliz , $p = z_x(P)$ eta $q = z_y(P)$ bi ezezagunentzat bi ekuazio lortzen ditugu:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \dot{x}p + \dot{y}q \, , \\ 0 &= F(x(t), y(t), z(t), p, q) \, . \end{aligned}$$

(Forma simetrikoa egokia da baldin eta argumentua aldatzen badugu, q-rekiko independentzia abiapuntz hartzeko)

Butxadura

Aurreko sistemak soluzio bakarra ez badu, bi aukera dago: edo bai p baita q ere askeak dira, edo q p-ren bidez zehaztua da (edo alderantziz). Demagun p guztientzat soluzioa dagoela, hau da

$$\forall p \qquad F\left(x(t), y(t), z(t), p, \frac{\dot{z}-p\dot{x}}{\dot{y}}\right) = 0$$

Ondorioz

$$\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\dot{x}}{\dot{y}}\frac{\partial F}{\partial q} \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial p}\mathrm{d}y - \frac{\partial F}{\partial q}\mathrm{d}x = 0\,.$$

Butxadura

Eraiki dogun moduan dela eta ($p \to z_x$, $q \to z_y$, $F = 0$), ondokoa ere betetzen da:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}p &= z_{xx}\mathrm{d}x + z_{xy}\mathrm{d}y\,; \\ 0 &= F_x + F_z p + z_{xx}F_p + z_{xy}F_q\,, \\ 0 &= F_y + F_z q + z_{xy}F_p + z_{yy}F_q\,, \end{aligned}$$

Beraz ($\mathrm{d}y = [F_q/F_p]\,\mathrm{d}x$ erabiliz)

$$\mathrm{d}p = \frac{z_{xx}F_p + z_{xy}F_q}{F_p}\mathrm{d}x = -\frac{F_x + F_z p}{F_p}\mathrm{d}x\,.$$

$$\mathrm{d}q = -\frac{F_y + F_z q}{F_p}\mathrm{d}x\,.$$

17.3 Karakteristiken ekuazioa

Karakteristiken ekuazioa

Lau ekuazio diferentzial arrunten sistema:

$$\frac{\mathrm{d}z}{pF_p + qF_q} = \frac{\mathrm{d}x}{F_p} = \frac{\mathrm{d}y}{F_q} = \frac{-\mathrm{d}p}{F_x + pF_z} = \frac{-\mathrm{d}q}{F_y + qF_z}\,.$$

Soluzio orokorra: 5 dimentsioetan, *kurba familia*, lau parametroekin. Kurba hauek: *Kurba karakteristikoak, karakteristikak.*

γ 3 dimentsiotako kurba (x_0, y_0, z_0) puntuan kurba karakteristiko batera jaso ahal badugu, problemak ez du soluzio bakarra (gerta liteke soluziorik ez izatea edo soluzio kopurua infinitoa izatea).

Orokorrean ezin dugu ziurtatu 3D espazioko punto batetik soilik kurba karakteristika bat pasatzen dela (hau da, 5D espazioko kurba karakteristikaren projekzioa).

Soluzioa karakteristiken multzoa

Demagun γ zintzoa (zintzoa: $p\dot{x} + q\dot{y} = \dot{z}$ eta $F(x, y, z, p, q) = 0$ ekuazioek soluzio bakarra onartzen dute, , $p = z_x(P)$ eta $q = z_y(P)$). γ kurbaren edozein parametrotan $(x(t), y(t), z(t), p(t), q(t))$ 5dim bektorea karakteristiken ekuazio sistemarentzat hastapen datua dogu. Demagun t parametrori dagokion puntutik pasatzen den karakteristika σ parametroaren bidez adierazten dugula. Hau honela izanda, lehen ordenako deribatu partzialetako ekuazioaren soluzia, γ barnean izanda, $(x(t,\sigma), y(t,\sigma), z(t,\sigma), p(t,\sigma), q(t,\sigma))$ bost dimentsiotako gainazala dugu.

t bakoitzarentzat , $(x(t,\sigma), y(t,\sigma), z(t,\sigma), p(t,\sigma), q(t,\sigma))$ bektorea

$$\frac{z'}{pF_p + qF_q} = \frac{x'}{F_p} = \frac{y'}{F_q} = \frac{-p'}{F_x + pF_z} = \frac{-q'}{F_y + qF_z}\,,$$

ekuazioen soluzioa da, non $'$ ikurra σ-rekiko deribatua den, eta hastapen balioa $(x(t,0), y(t,0), z(t,0), p(t,0), q(t,0)) = (x(t), y(t), z(t), p(t), q(t))$.

Adibidea

$$z = z_x z_y\,; \qquad F(x,y,z,p,q) = pq - z\,;$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{2pq} = \frac{\mathrm{d}x}{q} = \frac{\mathrm{d}y}{p} = \frac{-\mathrm{d}p}{-p} = \frac{-\mathrm{d}q}{-q} = \mathrm{d}\sigma\,;$$

Solution:

$$\begin{aligned} x = c_1 + c_4 e^{\sigma} \quad &, \qquad y = c_2 + c_3 e^{\sigma}\,, \\ z = c_5 + c_3 c_4 e^{2\sigma} \quad &, \\ p = c_3 e^{\sigma} \quad &, \qquad q = c_4 e^{\sigma}\,. \end{aligned}$$

Adibidea jarr.

γ_1 datua $x = 1$, $z = y$ bada,

$$(x(t,0), y(t,0), z(t,0), p(t,0), q(t,0)) = (1, t, t, t, 1)$$

eta

$$(x(t,\sigma), y(t,\sigma), z(t,\sigma)) = \left(e^{\sigma}, te^{\sigma}, te^{2\sigma}\right)\,,$$

edo

$$z_1(x,y) = xy\,.$$

Datu bateraezina

Biz γ_2 datua $x = y$, $z = x^2$. Honela

$$(x(t,0), y(t,0), z(t,0), p(t,0), q(t,0)) = (t, t, t^2, t, t)$$

eta soluzioa gainazal endakatua da: bakarrik $x = y$, $z = x^2$ lerroa.

Hastapen datua kurba karakterisktiko batera jaso dugu.

17.4 Ekuazio kuasilinealak (ia linealak)

Ekuazio kuasilinealak (ia linealak)

$$A(x,y,z)z_x + B(x,y,z)z_y = C(x,y,z)\,.$$

Karakteristiken ekuazio sistema honako hau dugu:

$$\left(\frac{\mathrm{d}z}{pA + qB} =\right)\left[\frac{\mathrm{d}z}{C} = \frac{\mathrm{d}x}{A} = \frac{\mathrm{d}y}{B}\right] = \frac{-\mathrm{d}p}{F_x + pF_z} = \frac{-\mathrm{d}q}{F_y + qF_z}\,;$$

x, y, z aldagaientzat *bananduak dira* p, q-rentzat: 5d-tako kurba karakteristikoek proiekzio simple dute 3 dimentsioetan. Cauchy-ren hastapen datuaren analisia zuzenean 3d-n egiten dugu.

Adibidea

$$yzz_x + z_y = 0\,, \qquad \gamma := \left\{x = 0, z = y^3\right\}\,.$$

Ekuazioak

$$\frac{\mathrm{d}x}{yz} = \frac{\mathrm{d}y}{1} = \frac{\mathrm{d}z}{0} = \mathrm{d}\sigma\,,$$

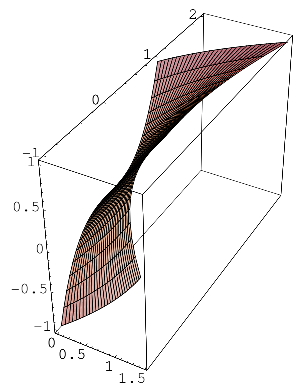
Soluzioak

$$x(\sigma) = c_1 + c_2 c_3 \sigma + \frac{1}{2} c_3 \sigma^2\,, \quad y(\sigma) = \sigma + c_2\,, \quad z(\sigma) = c_3\,,$$

non c_1, c_2, c_3 σ-rekiko independeak diren. Hastapen datua $(0, t, t^3)$, hastapen baldintzapeko DPE-ren soluzioa:

$$x(t,\sigma) = \frac{1}{2} t^3 \sigma^2 + t^4 \sigma\,, \quad y(t,\sigma) = \sigma + t\,, \quad z(t,\sigma) = t^3\,.$$

Adibidea jarr.



Adibidea jarr.

$$\frac{\mathrm{d}x}{yz} = \frac{\mathrm{d}y}{1} = \frac{\mathrm{d}z}{0}\,.$$

Soluzio orokorraren sistema: $z = \zeta$ and $x - \zeta y^2/2 = \xi$.

(ξ, ζ) bikoteak 3d-takp kurba zehazten du (*kurba karakteristikoa*).

DPE-ren soluzio orokorra: karakteristiken familiak, $g(\xi, \zeta) = 0$ or $\xi = f(\zeta)$.

$$x = \frac{1}{2} y^2 z + f(z)\,.$$

[Egiaztatu: deribatu x eta y aldagaiekiko , $1 = y^2 z_x/2 + f'(z) z_x$, $0 = zy + y^2 z_y/2 + f'(z) z_y$. Askatu $f'(z)$, ordezkatu: DPE] HBP (hastapen baldintzapeko problema): $\gamma = \{x = 0, z = y^3\}$, soluzio orokorrean ordezkatu, ondorioz $f(y^3) = -y^5/2$, HBP-ren soluzioa $2x - zy^2 + z^{5/3} = 0$ da.

17.5 Lehen ordenako DPE linealak

Lehen ordenako DPE linealak eta adibidea

$$A(x,y)z_x + B(x,y)z_y = C(x,y,z)\,.$$

Karakteristikak

$$\frac{\mathrm{d}z}{C(x,y,z)} = \left[\frac{\mathrm{d}x}{A(x,y)} = \frac{\mathrm{d}y}{B(x,y)}\right]\,,$$

x eta y-rentzako ekuazioak bananduak dira; soluzioak: l3d-tako kurbak, karakteristika izena berriro eskuratuz..

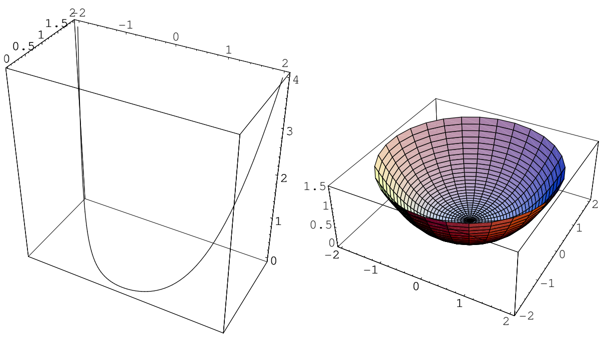
Adibidea: $z_x + z_y = 1$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y = \mathrm{d}z$, so $\xi = x - y$, $z = \eta + x$, karakteristiken familia, $\eta = f/\xi)$, soluzioa.: $z(x,y) = x + f(x-y)$.

Beste adibide bat, HBP

$$xz_y = yz_x\,,$$

beraz $z = \eta$ eta $x^2 + y^2 = r^2$; soluzio orokorra $z = f(r)$.

- HBP1: $\gamma_1 = \{x^2 + y^2 = 4, z = 1\}$; sartu soluzio orokorrean, $f(2) = 1$, f zehaztugabekoa, hastapen datua karakteriska delako!
- HBP2: $\gamma_2 = \{x^2 - 2y = 0, z = y^2\}$; berridatzi γ $r^2 = 2y + y^2$ eta $y^2 = f(\sqrt{2y + y^2})$, beraz $f(r) = 2 + r^2 - 2\sqrt{1 + r^2}$.



17.6 Bi aldagai independente baino gehiago

Bi aldagai independente baino gehiago

$$F(\{x_i\}_{i=1}^n, z, \{\partial^i z\}_{i=1}^n) = 0\,.$$

Kuasilinealeetan,

$$\sum_{j=1}^{n} A_j\left(\{x_i\}_{i=1}^n, z\right)\partial^j z = C\left(\{x_i\}_{i=1}^n, z\right)\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{A_1} = \frac{\mathrm{d}x_2}{A_2} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x_n}{A_n} = \frac{\mathrm{d}z}{C}\,.$$

Bi baino gehiago, adibidea

Adibidea: $u_x + u_y + u_z = 3u$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y = \mathrm{d}z = \mathrm{d}u/3u$, eta soluzioa $u(x, y, z) = g(x - y, x - z)\exp(3x)$.

HBP: $\{x = y + y^2, u = (y^4 - y + z)e^{3y}\}$ lerrotik. Beraz $g(\xi, \zeta) = (\xi^2 + \xi - \zeta)e^{-3\xi}$ eta $u(x, y, z) = e^{3y}(x^2 - 2xy + y^2 - y + z)$.

Karakteristikeekin: $x(t) = t + c_1$, $y(t) = t + c_2$, $z(t) = t + c_3$, $u(t) = c_4 e^{3t}$; HBP: $x(0, \sigma, \tau) = \sigma + \sigma^2$, $y(0, \sigma, \tau) = \sigma$, $z(0, \sigma, \tau) = \tau$, $u(0, \sigma, \tau) = (\sigma^4 - \sigma + \tau)e^{3\sigma}$.

Azkenez: $x(t, \sigma, \tau) = t + \sigma + \sigma^2$, $y(t, \sigma, \tau) = t + \sigma$, $z(t, \sigma, \tau) = t + \tau$, $u(t, \sigma, \tau) = (\sigma^4 - \sigma + \tau)e^{3\sigma+3t}$.

18 Bigarren ordenako ekuazioak

18.1 Cauchy-ren problemak

Problemaren agerpena

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0\,,$$

$p = u_x$, $q = u_y$, $r = u_{xx}$, $s = u_{xy}$, $t = u_{yy}$: Ekuazioa. Soluzioa: gainazala.

HBP: $(x(\tau), y(\tau), z(\tau)$?

Honen bidez $\dot{z} = p\dot{x} + q\dot{y}$ zehazten dugu, ez da aski. *Datu gehiago* behar dugu: $p(\tau)$ edo $q(\tau)$ (edo euren gainezarmena). Horrela, p eta q, biak, hastapen lerroak zehaztuak dira.

r, s, t, sistema:

$$F = 0\,, \qquad \dot{p} = r\dot{x} + s\dot{y}\,, \qquad \dot{q} = s\dot{x} + t\dot{y}\,.$$

Butxadura

[Lehen ordenakoetan bezala:] Ez dago soluziorik baldin eta

$$F_r\dot{y}^2 - F_s\dot{y}\dot{x} + F_t\dot{x}^2 = 0$$

bada. Posible izango litzateke 8d-tan aztertzea, zaila.

Kasu berezia:

$$A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} = D(x, y, u)\,.$$

Honela:

$$A\mathrm{d}y^2 - 2B\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + C\mathrm{d}x^2 = 0$$

planoan karakteristikak.

18.2 Bigarren ordenako DPE-een sailkapena

Sailkapena

$F_r\dot{y}^2 - F_s\dot{y}\dot{x} + F_t\dot{x}^2 = 0$ koadratikoa $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ funtzioan. Bi soluzio erreal izateko, diskriminatzailea positiboa izan behar da. Bat bakarrik izateko, nulua; soluzio errealik ez izateko, negatiboa. Kasu berezian hau dugu diskriminatzailea:

$$\Delta = B^2 - AC\,.$$

- $\Delta > 0$, bi soluzio, *hiperbolikoa*
- $\Delta = 0$, soluzio erreal bat, *parabolikoa*
- $\Delta < 0$, ez dago soluzio errealik, *eliptikoa*

18.3 Karakteristikek informazioa garraiatzen dute

Lehen ordenako ekuazioak

Demagun $A(x,y)z_x+B(x,y)z_y = C(x,y,z)$ lehen ordenako ekuazio mota. Karakteristiken ekuazioa $y' = B/A$; soluzioa (kongruentzia izanda) $\phi(x,y) = \xi$, beraz $A\phi_x + B\phi_y = 0$. $\xi = \phi(x,y)$, $\zeta = y$ aldagai aldaketaren bidez, ekuazioa $z_\zeta = \gamma(\xi,\zeta,z)$ bihurtzen da, ekuazio diferentzial arrunta!

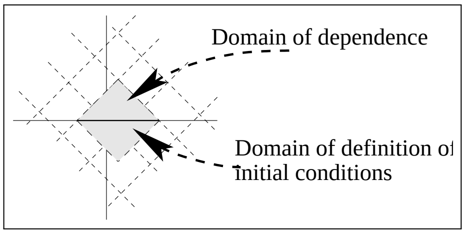
Karakteristika baten edozein puntutan z-ren balioa beste puntu jakin batekoak zehazten du (HBP ekuazio diferentzial arruntarentzat); informazioa karakteristikan zehar dario.

Adibidea: $\rho_x + \rho_y = \rho^2$, karakteristikak $\xi = x - y$, $\rho_\zeta = \rho^2$, soluzioa $\rho = 1/(f(\xi) - \zeta)$.

Bigarren ordena

(x,y) puntutik bi karakteristika pasatuz gero, koordenatu sistema berria. Aldagai aldaketa egin, eta ikusten dugu soluzioa guztiz zehaztua dela menpeko aldagaiaren eta bere deribatuaren balioen bidez (p edo q, eta independenteki $\dot{z} = p\dot{x} + q\dot{y}$): Cauchy-ren problema ondo planteatuta dago hiperbolikoetan.

Uhin ekuazioa



18.4 Ondo planteatutako problemak

Ondo planteatutako problemak

- *Hiperbolikoa*: Cauchy-ren problema, muga irekia: Γ, $u|_\Gamma$ *eta* $\mathbf{n}_\Gamma \cdot (\nabla u)|_\Gamma$.
- *Parabolikoa*: Muga irekia, Dirichlet, Neumann, nahasia. ($u|_\Gamma$, $\mathbf{n}_\Gamma \cdot (\nabla u)|_\Gamma$, $\alpha u|_\Gamma + \beta \mathbf{n}_\Gamma \cdot (\nabla u)|_\Gamma$).
- *Eliptikoa*: Muga itxia, Dirichlet, Neumann, Nahasia.