

## Atala VI

# Hurbilketa metodoak

## 19 Sarrera

### Sarrera

Soluzio zehatzak ez ditugu beti lortuko... eta askotan, nahiz eta lortu, ez dira erabilgarriak informazioa eskuratzeko. Soluzio *hurbilduak* behar ditugu.

- Perturbazio metodoak
- Aldakuntzaren metodoak ("Variational methods")
- Garapen asintotikoak
- Zenbakizko metodoak

## 20 Perturbazio metodoak

Zailtasunak:

- Konbergentzi eremua zehaztea;
- Konbergentziarik ez egotea (perturbazio singularrak)

## 21 Perturbazio arrunten teoria

**Adibidea: perturbazio arrunta**

$$y' + \epsilon y^2 = 0; \quad y(0) = a.$$

Saiatu soluzioa  $\epsilon$ -en berretura serie forman lortzen:

$$y \rightarrow y(x; \epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n y_n(x).$$

Errepikapen adierazpena:

$$y'_{n+1} + \sum_{k=0}^n y_k y_{n-k} = 0, \quad n \geq 0.$$

Hastapen baldintza, printzipioz, ez da  $\epsilon$ -en funtzioa, beraz ez dugu garatu behar eta

$$y_0(0) = a; \quad y_n(0) = 0, \quad n > 0.$$

**Adibidea, jarr.**

Kasu honetan, errepikapenaren soluzioa erraza da:  $y_n(x) = (-1)^n a^{n+1} x^n$ , eta

$$y(x; \epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \epsilon^n a^{n+1} x^n.$$

beraz  $|x| < 1/|\epsilon a|$  eremuan bere limitea  $y(x) = a/(1 + \epsilon a x)$  da.

### Adibidea DPErekin

$$\nabla^2 u + \frac{\epsilon}{R^2} u^2 = 0, \quad u(R, \theta) = \cos \theta, \quad r \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi).$$

Garatu  $u(r, \theta; \epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n u_n(r, \theta)$ . Zerogarren ordenean

$$\nabla^2 u_0 = 0, \quad u_0(R, \theta) = \cos \theta,$$

eta  $u_0(r, \theta) = (r/R) \cos \theta$  (inplizituki:  $r = 0$ ).

### Adibidea, jarr.

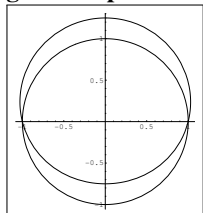
Lehen ordena:

$$\nabla^2 u_1 = -\frac{u_0^2}{R^2} = -\frac{r^2}{R^4} \cos^2 \theta = -\frac{r^2}{2R^4} (1 + \cos 2\theta), \quad u_1(R, \theta) = 0.$$

$$u_1(r, \theta) = \frac{1}{32} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^4 \right] + \frac{1}{24} \left[ \left( \frac{r}{R} \right)^2 - \left( \frac{r}{R} \right)^4 \right] \cos 2\theta.$$

Eta abar. Lehen ordena bera oso ona baita  $\epsilon = 1$  kasuan ere! (errorea % 5akoa da!)

### Muga baten perturbazioa



$$\nabla^2 u = 0, \quad u\left(1 + \frac{1}{4} \sin \theta, \theta\right) = \cos \theta, \quad r \in \left[0, 1 + \frac{1}{4} \sin \theta\right], \theta \in [0, 2\pi).$$

### Muga baten perturbazioa

Erabili

$$\nabla^2 u = 0, \quad u(1 + \epsilon \sin \theta, \theta) = \cos \theta, \quad r \in [0, 1 + \epsilon \sin \theta], \theta \in [0, 2\pi).$$

Eta mugalde baldintza:

$$u(1, \theta) + u_r(1, \theta)(\epsilon \sin \theta) + u_{rr}(1, \theta) \frac{(\epsilon \sin \theta)^2}{2!} + O(\epsilon^3) = \cos \theta.$$

Garatu  $u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n u_n(r, \theta)$ . Honela *zirkuluan* ondoko problema sorta lortzen dugu

### Muga baten perturbazioa, jarr.

$$\nabla^2 u_0 = 0, \quad u_0(1, \theta) = \cos \theta;$$

$$\nabla^2 u_n = 0, \quad u_n(1, \theta) = -\sum_{k=1}^n (\partial_r^k u_{n-k})(1, \theta) \frac{\sin^k \theta}{k!}.$$

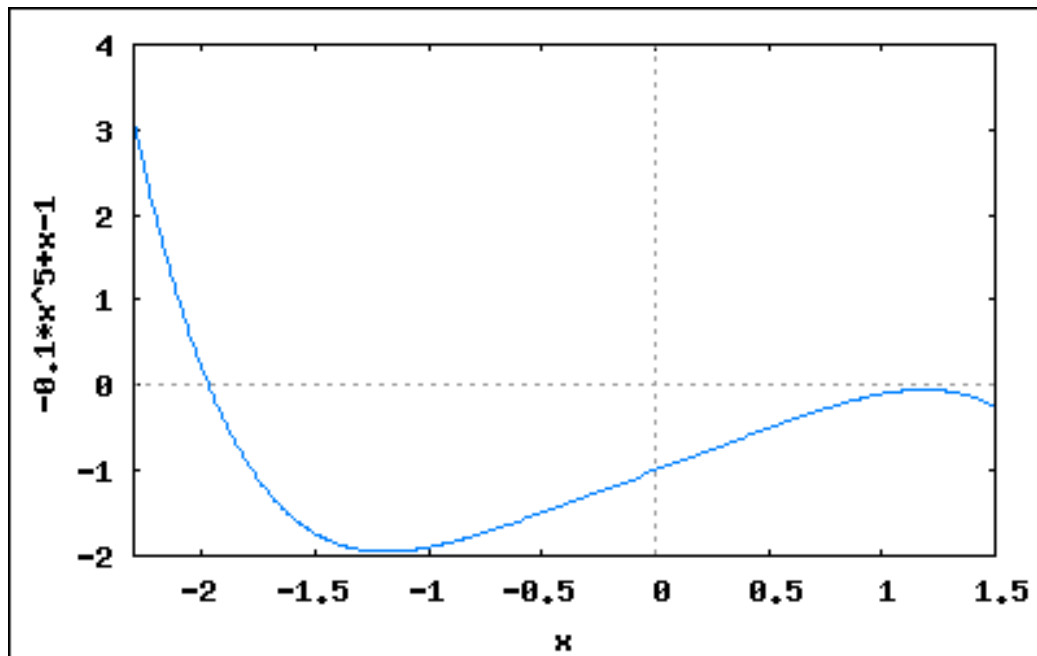
Lehenengo gaiak:

$$u_0(r, \theta) = r \cos \theta; \quad u_1(r, \theta) = -\frac{r^2}{2} \sin 2\theta.$$

$$u_2(r, \theta) = \frac{1}{2} r \cos \theta - \frac{1}{2} r^3 \cos(3\theta).$$

## 22 Perturbazio ez arruntak

Adibidea:  $x = 1 + \epsilon x^5$ . Irudian,  $x - 1 - 0.1x^5$ : soluzioa oso urrun dago, ez da perturbatiboa.



Izatez, pentsa dezakegu agian  $\epsilon x^5$  gai perturbatiboa ez dela. Hori gauzatzeko, egin dezagun aldagai aldaketa,  $x = \epsilon^\alpha y$ ; hau da,

$$\epsilon^\alpha y - 1 - \epsilon^{5\alpha+1} y^5 = 0.$$

Hiru aukera ditugu: 1)  $\epsilon^\alpha y$  gaia perturbatiboa izatea; horrek esan nahi du  $5\alpha + 1 = 0$ , beste biak konparagarriak izateko, eta kontraesana dugu: perturbatibotzat jo dugun lehenengo gaia izatez  $\epsilon^{-1/5}$  ordenakoa da, hau da, oso handia  $\epsilon$  txikia bada.

2)  $\epsilon^{5\alpha+1} y^5$  gaia perturbatiboa:  $\alpha = 0$ , eta txarra da.

3) 1 da perturbazioa! Honen ondorioz,  $\alpha = -1/4$ , eta  $y - y^5 - \epsilon^{1/4} = 0$  ekuazioa dugu. Biz  $\delta = \epsilon^{1/4}$  perturbazio parametro berria.  $y_0 = -1$  puntuaren inguruan garatuz ( $y \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} y_n \delta^n$ ), ondokoa lortzen dugu:

$$x^* = -\frac{1}{\epsilon^{1/4}} - \frac{1}{4} + \frac{5\epsilon^{1/4}}{32} - \frac{5\epsilon^{1/2}}{32} + \frac{385\epsilon^{3/4}}{2048} + O(\epsilon)$$

## 23 Perturbazio singularrak

**Perturbazio singularrak**

$$\epsilon y' + y^2 = 0, \quad y(0) = a.$$

Garapen “inozoa” ekuazioan saiaturaz gero, hau da  $y \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n y_n(x)$  ordezkapena, bakarrik  $y = 0$  soluzio tribiala berreskuratzen dugu; beraz problemak ez du soluziorik.

Zergatia:  $\epsilon \rightarrow 0$  limitean, ekuazioak bere izaera lortzen du; jada ez da lehen ordenako ekuazio diferentziala. Perturbazio singularra!

Soluzio zehatza:  $y(x) = a/(1 + ax/\epsilon) = a\epsilon/(\epsilon + ax)$ .  $\epsilon$ -en berretura serie moduko garapena ondokoa dugu:

$$\frac{\epsilon}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\epsilon^n}{a^n x^n},$$

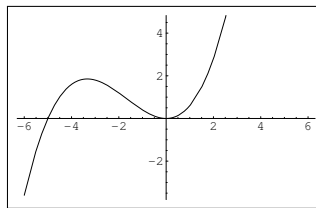
eta  $x = 0$  puntuan dibergentea da (izatez *garapen asintotikoa* da).

### 23.1 Gai sekularrak

#### Gai sekularrak

$$\ddot{x} + x + \epsilon x^2 = 0, \quad x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Potenzial baten eraginaren pean higitzen den partikula (irudia,  $\epsilon = 0.3$ )



#### Gai sekularrak

Energia finitua bada, higidura periodikoa da.

Garapen "inozoa":  $x \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n x_n(t)$ ; ondorioa

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + x_0 &= 0 & x_0(0) &= a, & \dot{x}_0(0) &= 0; \\ \ddot{x}_n + x_n &= -\sum_{k=0}^{n-1} x_k x_{n-1-k} & x_n(0) &= 0, & \dot{x}_n(0) &= 0 \end{aligned}$$

Zerogarren ordenean  $x_0(t) = a \cos t$ .

#### Gai sekularrak

Lehen ordena:

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -a^2 \cos^2 t = -\frac{a^2}{2} (1 + \cos(2t)), \quad x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0.$$

Soluzioa:

$$x_1(t) = \frac{a^2}{6} (-3 + 2 \cos t + \cos 2t).$$

#### Gai sekularrak

Bigarren ordena:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 + x_2 &= -2x_0 x_1 = -\frac{a^3}{6} (2 - 5 \cos t + 2 \cos 2t + \cos 3t), \\ x_2(0) &= 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0. \end{aligned}$$

Soluzioa:

$$x_2(t) = \frac{5a^3}{12} t \sin t - \frac{a^3}{144} [48 - 29 \cos t - 16 \cos 2t - 3 \cos 3t].$$

Lehen gaia *sekularra* da. Perturbazioa ez da uniformea: bigarren ordena zerogarren ordena baino handiagoa da  $t > 1/\epsilon^2$  bada.

### Konbergentzia uniforme

$\sum_{k=0}^n \epsilon^k x_k(t)$  serieak  $x(t)$  funtziora *uniformeki* jotzen du  $I$  tartean baldin eta  $\forall \delta > 0 \exists N(\delta) \setminus \forall t \in I$  eta  $\forall n > N(\delta)$  zenbaki naturalak ondokoa betetzen bada:

$$\left| x(t) - \sum_{k=0}^n \epsilon^k x_k(t) \right| < \delta$$

[konbergentzia izateko, ez uniforme,  $N(\delta)$  izan beharrea aski dugu  $N(\delta, t)$  izatea]

## 23.2 Lindstedt-en metodoa

### Lindstedt-en metodo

Aplikagarritasuna: Ekuazio diferentzial arrunten soluzio periodikoak perturbazio garapenean gai sekularrak agertuz gero.

Oinarriko ideia: Soluzio periodikoa dela jakin badakigu. Hala ere, periodoaren balioa perturbazio parametroaren funtzioa da (adibidez  $\ddot{x} = -V'(x, \epsilon)$  ekuazioak  $E = \dot{x}^2/2 + V(x, \epsilon)$  energia du, kontserbakorra da. Periodoa, beraz, hau da:

$$T(E, \epsilon) = 2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{2[E - V(x, \epsilon)]}}$$

Ondorioz: *garatu maiztasun angeluarra perturbazio parametroan ere*, eta hau erabili gai sekularrak sortzen dituzten gaiak ebazteko.

### Lindstedt-en metodoa

$x(t)$ -rentzat ekuazioa:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \epsilon f(x, \dot{x})$$

1) Aldagaiak aldatu (aldagai berrietan maiztasuna 1 izateko!); aldagai aldaketa bera  $\epsilon$ -en menpekoa da!

$$\tau = \Omega(\epsilon)t, \quad \frac{d}{dt} = \Omega(\epsilon) \frac{d}{d\tau}$$

Ondokoa,  $'$ -rekin  $\tau$ -rekiko deribatua adieraziko dugu. (Kontuan hartu izatez periodoa hastapen energiaren menpekoa dela) Ekuazioa:

$$\Omega^2 x'' + \omega^2 x = \epsilon f(x, \Omega x')$$

2) Perturbazio garapenak

$$x \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n x_n(\tau), \quad \Omega(\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \omega_n$$

### Lindstedt-en metodoa

Zerogarren ordena:

$$\omega_0^2 x_0'' + \omega^2 x_0 = 0$$

Hartu  $\omega_0 = \omega$ , honela  $x_0(\tau) = a \cos \tau$ .

Lehen ordena:

$$\omega^2 (x_1'' + x_1) = -2\omega\omega_1 x_0'' + f(x_0, \omega x_0') = 2\omega\omega_1 a \cos(\tau) + f(x_0, \omega x_0')$$

$\cos \tau$  gaiak gai sekular bat,  $\tau \sin \tau$  formakoa, sortzen du.  $f$  ere antzeko gai sekular baten jatorria bada,  $\omega_1$  ondo aukeratzeak biak ezabatuko ditu.

### Lindstedt-en metodoa: adibidea

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \epsilon x^3, \quad x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Zerogarren ordena:  $x_0(\tau) = r \cos \tau$ .

Lehen ordena:

$$x_1'' + x_1 = \frac{2\omega_1}{\omega} r \cos \tau + \frac{r^3}{4\omega^2} (3 \cos \tau + \cos 3\tau).$$

Gai sekularrik ez egoteko:

$$\omega_1 = -\frac{3}{8} \frac{r^2}{\omega}.$$

### Lindstedt-en metodoa: adibidea

Honela

$$x_1(\tau) = \frac{r^3}{32\omega^2} (\cos \tau - \cos 3\tau)$$

non  $x_1(0) = 0 = x_1'(0)$  hartu ditugun. Eta

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos \left[ \omega \left( 1 - \frac{3\epsilon a^2}{8\omega^2} \right) t \right] + \\ &\quad \frac{\epsilon a^3}{32\omega^2} \left\{ \cos \left[ \omega \left( 1 - \frac{3\epsilon a^2}{8\omega^2} \right) t \right] - \cos \left[ 3\omega \left( 1 - \frac{3\epsilon a^2}{8\omega^2} \right) t \right] \right\} + \\ &\quad O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

### Lindstedt-en metodoaren mugak, luzapena

Metodoa soluzio periodikoetan soilik erabil daiteke (adibidez, aurreko adibidean,  $V(x) = \omega^2 x^2/2 - \epsilon x^4/4$ , hastapen posizioa  $|x| < \omega/\sqrt{\epsilon}$  eta abiadura nulua badira soluzio guztiak periodikoak dira; ez, ordea, hastapen energia  $\omega^4/4\epsilon$  baino handiagoa bada edo hastapen posizioa  $(-\omega/\sqrt{\epsilon}, \omega/\sqrt{\epsilon})$  tartetik kanpo badago; era berean,  $V(x) = x^2/2 + \epsilon x^3/3$  potentzialarekin, non pausagunetik  $x(0) < -1/\epsilon$  edo  $x(0) > 1/2\epsilon$  tartetik hasten diren higidurak periodikoak ez diren).

Metodoaren luzapen eta orokortzea eskala anitzen metodoa da. Fisikoki, azpiko ideia da garapen matematikoan agertzen diren denbora eskalak esanguratsuak direla.

## 24 Eragileen perturbazio garapenak

### Matrizeen perturbazioak

Demagun ondoko problema:

$$(L_0 + \epsilon L_1) \mathbf{v} = \mathbf{w},$$

non  $\mathbf{v}$  zehaztu nahi dugun  $\mathbf{w}$ -ren menpean. I.e  $(L_0 + \epsilon L_1)^{-1}$  kalkulatu nahi dugu.

Formalki, ordezkatu

$$(L_0 + \epsilon L_1)^{-1} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n l_n$$

$(L_0 + \epsilon L_1)^{-1} (L_0 + \epsilon L_1) = 1$  adierazpenean, hau lortzeko:

$$l_{k+1} = -l_k L_1 L_0^{-1}, \quad l_0 = L_0^{-1} \implies l_k = (-1)^k (L_0^{-1} L_1)^k L_0^{-1}.$$

### Adibidea

Biz

$$L_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Honela,  $L_0^{-1} = L_0$  eta

$$L_0^{-1}L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Adibidea jarr.

Bigarren ordenaraino, beraz,

$$(L_0 + \epsilon L_1)^{-1} = L_0 + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \epsilon^2 \begin{pmatrix} 0 & 10 & 2 \\ 10 & 10 & 16 \\ 2 & 16 & 10 \end{pmatrix} + O(\epsilon^3)$$

### Balio eta bektore propioen garapenak

$$(L_0 + \epsilon L_1)\Phi_n = \Lambda_n \Phi_n$$

Garatu balio eta bektore propioak  $\epsilon$ -en berretura serie moduan (endakapenik gabeko kasuan):

$$\Phi_n = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \varphi_n^{(k)}, \quad \Lambda_n = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \lambda_n^{(k)}.$$

### Balio eta bektore propioen garapenak

Ekuazio sorta:

$$\begin{aligned} L_0 \varphi_n^{(0)} &= \lambda_n^{(0)} \varphi_n^{(0)}; \\ L_0 \varphi_n^{(k+1)} &= -L_1 \varphi_n^{(k)} + \sum_{l=0}^{k+1} \lambda_n^{(l)} \varphi_n^{(k-l+1)}. \end{aligned}$$

Demagun endakapenik ez dagoela, eta biderkatu  $\varphi_m^{(0)}$  eskalarrarekin, hau lortzeko:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_m^{(0)}, \varphi_n^{(1)} \rangle &= \frac{1}{\lambda_n^{(0)} - \lambda_m^{(0)}} \langle \varphi_m^{(0)}, L_1 \varphi_n^{(0)} \rangle. \\ \lambda_n^{(1)} &= \langle \varphi_n^{(0)}, L_1 \varphi_n^{(0)} \rangle. \end{aligned}$$

### Adibidea

$$\begin{aligned} L_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \\ \varphi_1^{(0)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1^{(0)} = 1; \quad \varphi_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1^{(0)} = 2; \end{aligned}$$

Beraz

$$\lambda_1^{(1)} = \lambda_2^{(1)} = 0; \quad \varphi_1^{(1)} = 0, \quad \varphi_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Izatez hau da soluzio zehatza!

## 24.1 Sturm-Liouville: balio eta funtzio propioak

Ekuazio diferentzialaren adibidea (Sturm-Liouville)

$$L_0 y = -y'', \quad L_1 y = -y' \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

$$\lambda_n^{(0)} = n^2, \quad y_n^{(0)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx.$$

$$\lambda_n^{(1)} = \langle y_n^{(0)}, L_1 y_n^{(0)} \rangle = 0.$$

$$\begin{aligned} \langle y_m^{(0)}, y_n^{(1)} \rangle &= \frac{1}{\lambda_n^{(0)} - \lambda_m^{(0)}} \langle y_m^{(0)}, L_1 y_n^{(0)} \rangle = \\ &= \frac{2nm}{\pi(n^2 - m^2)^2} [1 - (-1)^{m+n}] \end{aligned}$$

Adibidea, jarr.

Soluzio zehatza:  $\lambda_n = n^2 + \epsilon^2/4$ ,  $y_n(x) \propto e^{-\epsilon x/2} \sin nx$ .

## 25 WKBJ

WKBJ

$$\psi''(x) + \omega^2(x)\psi(x) = 0,$$

non  $\omega$  funtzio "geldoa" den. Zerekin alderatu behar dugu, "geldo" izenondoan erabiltzeko? Dimentsio analisia dela eta, kontsidera dezagun

$$\left| \frac{\omega'}{\omega^2} \right| \ll 1.$$

$\omega$  konstante izango balitz,  $\psi \sim \exp(\pm i\omega x)$ . Honek esan nahi du  $\omega$ -ren aldaketei dagokie luzera eskala, hau da  $|\omega'/\omega|^{-1}$ ,  $\psi$ -ren aldaketei dagokiena baino askoz luzeagoa dela ( $|\omega|^{-1}$ ).

WKBJ

Hau sistematikoki erabiltzeko, zer egingo dugu? Aldagai aldaketa:  $x = \tau/\epsilon$ ,  $\dot{\omega}/\omega^2 \sim O(1)$  izateko, beraz  $\epsilon \ll 1$ ; eta  $\psi(x) \rightarrow \exp(iS(\tau)/\epsilon)$ . Honela,  $S$ -rentzat:

$$i\epsilon \ddot{S} - \dot{S}^2 + \omega^2 = 0.$$

Garatu  $S$   $\epsilon$ -en berreturretan. Beraz

$$\dot{S}_0^2 = \omega^2; \quad \dot{S}_{n+1} = \frac{1}{2\dot{S}_0} \left[ i\ddot{S}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \dot{S}_{k+1} \dot{S}_{n-k} \right].$$

WKBJ

$$S_0(x) = \pm \epsilon \int^x d\xi \omega(\xi); \quad S_1(x) = \frac{i}{2} \ln \omega(x),$$

non fase konstante batzuk idatziak ez diren.

Ondorioz:

$$\psi_{\pm}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\omega(x)}} e^{\pm i \int^x d\xi \omega(\xi)}.$$



### Adibidea

$$y'' + (1 + \epsilon x)y = 0.$$

$x > -1/\epsilon$  denean,  $\omega^2 = 1 + \epsilon x > 0$ . Geldoa?

$$\frac{\omega'}{\omega^2} = \frac{\epsilon}{2(1 + \epsilon x)^{3/2}}.$$

Bai  $\epsilon$  txikia bada eta  $x \gg -1/\epsilon$  betetzen bada.

Soluzio hurbildua:

$$y(x) \sim \frac{1}{(1 + \epsilon x)^{1/4}} \left\{ a \sin \left[ \frac{2(1 + \epsilon x)^{3/2}}{3\epsilon} \right] + b \cos \left[ \frac{2(1 + \epsilon x)^{3/2}}{3\epsilon} \right] \right\}.$$

### WKBJ, $\omega$ irudikaria

$\omega$  irudikarietan aplikagarria da WKBJ metodoa, "geldoa" izanez gero.

### WKBJ-ren aplikazioa Sturm-Liouville-ren problemetan

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad \psi(0) = \psi(L) = 0.$$

Edozein  $V(x)$  potentzialetarako (singularra ez bada) energia altuko  $\psi$  funtzioa oso azkar oszilatzen da, eta WKBJ aplikagarria da:

$$\psi \sim \frac{1}{[E - V(\xi)]^{1/4}} \sin \int_0^x d\xi \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} [E - V(\xi)]},$$

$x = 0$  puntuko mugalde baldintza inposatu ostean.

### Aplikazioa: SL

$x = L$  puntuko mugalde baldintza betetzeko, beraz, ondokoa gauzatu behar da:

$$\int_0^L d\xi \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} [E_n - V(\xi)]} = (n + 1)\pi,$$

eta honela  $E_n$ -rentzat ekuazio bat lortzen dugu; baliagarria da  $n$  handientzat (hor WKBJ hurbilketa ona delako).  $n$  handia, aldi berean, limitea klasikoa da: WKBJ hurbilketa *semiklasikoa* da.

### Adibideak

1. Adibidea:  $V(x) = 0$ .

$$E_n = \frac{(n + 1)^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}.$$

Izatez, bat dator emaitza zehatzarekin

2. Adibidea:  $E_n$  oso handia bada, garatu erroa ondokoa lortzeko:

$$E_n = \frac{(n + 1)^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} + \frac{1}{L} \int_0^L d\xi V(\xi) + \dots$$

### Adibideak

Adibidea:  $V(x) = -m\omega^2(x - l/2)^2/2$ . Defini dezagun  $e_\omega = mL^2\omega^2$ .

$$(n+1)\pi = \frac{\sqrt{e_\omega E}}{\hbar\omega} \left[ \sqrt{1 + \frac{e_\omega}{16E}} + 4\sqrt{\frac{E}{e_\omega}} \operatorname{arcsinh} \left( \frac{1}{4} \sqrt{\frac{e_\omega}{E}} \right) \right].$$

Ekuaio transzendentea. Soluzio hurbildua:

$$E_n = \frac{(n+1)^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} - \frac{m\omega^2L^2}{24} + O((n+1)^{-1}).$$

Garrantzitsua: aldi berean  $\psi_n$  hurbildua lortzen dugu, eta honela denetarik.

## 25.1 Itsastea

### WKBJ-ren muga

$\omega$  geldoa ez bada ez dabil. Batez ere biraketa puntu baten inguruan.

Horren inguruan, askotan,  $\omega^2(x) \sim a(x - x_0) + \dots$

Betetzen bada, Airy-ren ekuazioa agertzen da

$$y'' + a(x - x_0)y = 0,$$

bere soluzioa ondokoa izanda:

$$y(x) = \alpha \operatorname{Ai}(a^{1/3}(x_0 - x)) + \beta \operatorname{Bi}(a^{1/3}(x_0 - x))$$

(Airy-ren funtzioak).

### Itsastea

Demagun orain biraketa puntu bakarra dagoela  $x_0 = 0$  puntuan. Hau dela eta,  $\operatorname{sign}(\omega^2(x)) = -\operatorname{sign}(x)$ .  $x \rightarrow \infty$  limitean, beraz,

$$\begin{aligned} & \alpha \operatorname{Ai}(-a^{1/3}x) + \beta \operatorname{Bi}(-a^{1/3}x) \sim \\ & \frac{1}{2\pi^{1/2}(-a)^{1/12}x^{1/4}} \left( \alpha e^{-2(-a)^{1/2}x^{3/2}} + 2\beta e^{2(-a)^{1/2}x^{3/2}} \right), \end{aligned}$$

eta hau alderatu behar dugu ondokoarekin:

### Itsastea

$$\psi(x) \sim \frac{1}{\sqrt{|\omega(x)|}} \left( A e^{-\int_0^x d\xi |\omega(\xi)|} + B e^{\int_0^x d\xi |\omega(\xi)|} \right).$$

Era berean, beste alboan

$$\operatorname{Ai}(-z) \sim \frac{1}{\pi^{1/2}z^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3}z^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

eta

$$\operatorname{Bi}(-z) \sim \frac{1}{\pi^{1/2}z^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}z^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$z \rightarrow +\infty$  limitean.

## 26 Garapen asintotikoak

### 26.1 Definition

#### Garapen asintotikoak

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(x)$$

$x_0$  puntuaren inguruko garapen asintotikoa da baldin eta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\phi_{n+1}(x)}{\phi_n(x)} = 0$$

bada. (Izatez, konplexuetako sektore batean hartu behar dugu limitea hau zentzuzkoa izateko)

#### Garapen asintotikoak

Adibidea:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

$x = 0$  puntuaren inguruko garapen asintotikoa da. Ez da konbergentea!

### 26.2 Erabilgarritasuna

#### Erabilgarritasuna

Defini dezagun

$$f(x) = \int_0^{\infty} dt \frac{e^{-t}}{1 - xt}.$$

Ez dago definituta  $x$  positiboetan (integrazioa singularra da  $1/x$  puntuan, eta ez da integragarria), baina bai  $x$  negatiboentzat.

$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$  garapena erabilgarria da  $f(x)$  kalkulatzeko!

#### Adibidea

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dt \frac{e^{-t}}{1 - xt} &\sim \int_0^{\infty} dt e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} (xt)^n \\ &\sim \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^n \right) x^n \\ &\sim \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n. \end{aligned}$$

#### Adibidea

Defini dezagun

$$s_m(x) := \sum_{n=0}^m n! x^n.$$

$x = -0.1$  puntuan,  $f(-0.1) = 0.915633$  eta  $s_0 = 1, s_1 = 0.9, \dots, s_{10} = 0.9158192$

Hala ere, ez da konbergentea, eta hemendik aurrera gero eta txarragoa da hurbilketa.

## 26.3 Laplace-ren integralak

### Laplace-ren integralak eta Watson-en lema

$$I(s) = \int_0^{\infty} dt e^{-st} f(t)$$

motakoak.  $f$  funtzioaren Taylor-en garapena  $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$  da. Integrazizuna,  $s$  handientzat, oso konzentratuta dago  $t = 0$  puntuaren inguruan. Ordezkatuko dugu, beraz,  $f$ -ren garapena eta (TRANPA!!!) integrala eta seriea trukatuko ditugu:

$$I(s) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} dt e^{-st} t^n \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Garapen asintotikoa da!

### Laplace-ren integralak eta Watson-en lema

Nahiz eta  $f$  funtzioak 0 puntuaren inguruan Taylor-en garapena onartu,

$$I(s) = \int_0^{\infty} dt e^{-st} t^{\alpha} f(t)$$

integraletan ez dago  $t^{\alpha} f(t)$  funtzioaren Taylor-en garapenik, 0 puntuaren inguruan,  $\alpha$  zenbaki naturala ez bada. Beraz, aurreko kasuko garapena ez dirudi egokia...baina, hala ere, garatu  $f$ , eta aurreko tranparekin,

$$I(s) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} dt e^{-st} t^{n+\alpha} \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{s^{n+1+\alpha}}.$$

Hau da Watson-en lema.

### Laplace-ren integralak eta Watson-en lema

Gehiago orokortuz, demagun

$$I(s) = \int_0^{\infty} dt e^{sg(t)} t^{\alpha} f(t),$$

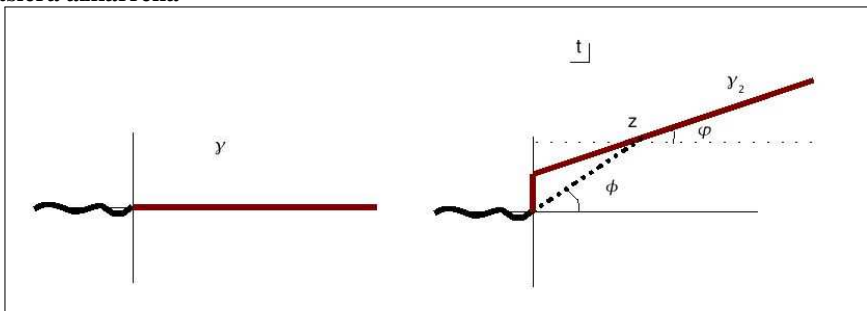
non  $g$  funtzioaren maximoa  $t = 0$  puntuan dagoen,  $g$  monotonoa eta positiboa eta  $g'(0) < 0$  diren. Defini dezagun  $\tau = -g'(0)t$  eta  $F(\tau) = f(-\tau/g'(0)) \exp[s(g(-\tau/g'(0)) - g(0) - \tau)]$ . Integralean ordezkatuz,

$$I(s) = \frac{e^{sg(0)}}{|g'(0)|} \int_0^{\infty} d\tau e^{-s\tau} F(\tau),$$

eta aurreko kasuan gaude. Hau da,

$$I(s) \sim \frac{e^{sg(0)}}{|g'(0)|} \left[ \frac{f(0)}{s} + \frac{1}{s^2} \left( \frac{2f'(0)}{|g'(0)|} + \frac{3g''(0)f(0)}{|g'(0)|^2} \right) + \dots \right].$$

### Jaitsiera azkarrena



Adibidea: Euler-en Gamma funtzioa:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^z = \int_{\gamma} d\tau e^{-\tau+z \ln \tau},$$

non  $\gamma$   $\tau$  aldagai konplexuko planoan ondoko ibilbidea den (logaritmoaren adarra hartu dugu  $\tau = \rho \exp(i\phi) \rightarrow \ln \tau = \ln \rho + i\phi$  moduan, non  $\phi \in (-\pi, \pi)$ ).

### Gamma funtzioa

Defini dezagun  $\phi(\tau) = -\tau + z \ln \tau$ . Bere deribatua nulua da  $\tau = z$  puntuan. Beraz,

$$\phi(\tau) = \phi(z) + \frac{1}{2} \phi''(z)(\tau - z)^2 + O((\tau - z)^3).$$

Orain ibilbidea deformatuko dugu,  $z$  puntutik pasa dadin, goian agertzen den moduan. Defini dezagun  $\rho e^{i\varphi} = t - z$ .  $\phi$  funtzioaren garapenean gai kuadratikoa, beraz,  $\phi''(z)(t - z)^2/2 = -\rho^2 \exp(2i\varphi)/2z$ , eta  $z$  puntutik ahalik eta modu azkarrenen pasatzeko,  $\varphi$  angelua  $z$  zenbaki konplexuaren argumentua zati bi hartu behar dugu:

#### 26.3.1 Stirling-en hurbilketa

##### Gamma funtzioa - Stirling-en hurbilketa

Honela,

$$\Gamma(z+1) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} d\rho e^{i\varphi} e^{-z+z \ln z} e^{-\rho^2/2|z|} \sim \sqrt{2\pi} z^{z+1/2} e^{-z}.$$