Atala II

Problema inhomogeneoak eta Green-en funtzioak

5 Problema inhomogeneoak eta Fredholm-en hautabidea

Problema inhomogeneoak

$$Ly = f\,, \qquad \text{Mugalde baldintzak}$$

Adibidea:

$$y'' = x\,, \qquad y(0) = y(\pi) = 0\,.$$

Soluzioa: ekuazioaren soluzio orokorra: $x^3/6 + \alpha x + \beta$; mugalde baldintza 0 puntuan, $\beta = 0$; mugalde baldintza π puntuan, $\pi^3/6 + \alpha\pi = 0$, i.e. $\alpha = -\pi^2/6$.

$$y(x) = \frac{x}{6}\left(x^2 - \pi^2\right)\,.$$

Soluzio bakarra.

Bigarren adibidea: soluzio barik

$$y'' + y = x\,, \qquad y(-\pi) = y(\pi) = 0\,.$$

Ekuazioaren soluzio orokorra: $y(x) = x + \alpha\sin x + \beta\cos x$.

Mugalde baldintzak:

$$-\pi - \beta = 0\,, \qquad \pi - \beta = 0\,.$$

Ez dago soluziorik.

Hirugarren adibidea: infinitu soluzio

$$y'' + y = x^2\,, \qquad y(-\pi) = y(\pi) = 0\,.$$

Ekuazioaren soluzio orokorra: $y(x) = x^2 - 2 + \alpha\sin x + \beta\cos x$.

Mugalde baldintzak:

$$\pi^2 - 2 - \beta = 0\,, \qquad \pi^2 - 2 - \beta = 0\,.$$

Problemaren soluzioak:

$$y(x) = x^2 - 2 + \alpha\sin x + (\pi^2 - 2)\cos x\,.$$

Fredholm-en hautabidea

Biz L SL eragile simetrikoa (MBk barne), eta $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ bere oinarri propioa, λ_n balio propioekin. Garatu oinarri honetan $Ly = f$ problema inhomogeneoan agertzen diren funtzio guztiak, eta kalkulatu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n \Rightarrow c_n = \frac{f_n}{\lambda_n}$$

0 balio propioa ez bada. Beraz, soluzioa existitzen da eta bakarra da.

0 balio propioa bada, dagokion funtzio propioa y_0

- f funtzioaren osagaia azpiespazio propio horretan ($\langle y_0, f\rangle_\rho$) ezberdin 0 bada, ez dago soluziorik.
- f funtzioaren osagaia nulua bada, ∞ soluzio.

6 Green-en funtzioa

Green-en funtzioa

$Ly = f$ problemaren soluzioaren bila gabiltz (L SL eragile simetrikoa, ρ haztapenarekin) ondoko forman:

$$y(x) = \int_a^b \mathrm{d}\xi\, G(x,\xi) f(\xi)\,.$$

Hau gertatuko litzateke baldin eta

$$L_x G(x,\xi) = \delta(x-\xi)$$

bada (ordezkapen zuzena).

Green-en funtzioak: kalkulua I

Erabil ditzagun L-ren funtzio propioak

$$y(x) \to \sum \alpha_n y_n(x)\,, \quad f(\xi) \to \sum f_n y_n(\xi)\,.$$

Formalki, jakin badakigu (L SL eragile simetrikoa, ρ haztapenarekin)

$$y(x) = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \langle y_n, f\rangle_\rho y_n(x) = \int_a^b \mathrm{d}\xi \sum_n \frac{1}{\lambda_n} y_n(x) \overline{y_n(\xi)} \rho(\xi) f(\xi)\,.$$

Beraz,

$$G(x,\xi) = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} y_n(x) \rho(\xi) \overline{y_n(\xi)}\,.$$

Green-en funtzioak: kalkulua II

Zuzenean $LG = \delta(x-\xi)$ adierazpenatik. L bigarren ordenakoa.

$\delta \Rightarrow$ Jauzia: $x = \xi$ puntuan (tartean dago) jauzia lehenengo deribatuan.

Bitez y_1 eta y_2 soluzioak, linealki independenteak; *ekuazioarenak* (tarte osoan!).

Idatz ditzagun ondoko bi gainezarmenak, $y_>(x,\xi)$ eta $y_<(x,\xi)$, non ξ parametroa den:

$$y_<(x,\xi) = A(\xi)y_1(x) + B(\xi)y_2(x)\,,\ \ y_>(x,\xi) = C(\xi)y_1(x) + D(\xi)y_2(x)\,,$$

eta A, B, C eta D koefizienteak (funtzioak, ξ-ren funtzioak) finkatu ondokoarekin:

1. $G(x,\xi) = \theta(\xi - x)y_<(x,\xi) + \theta(x-\xi)y_>(x,\xi)$ jarraitua $\forall x$ tartean.
2. G funtzioak mugalde baldintzak betetzen ditu;
3. $LG = \delta(x-\xi)$.

Green-en funtzioak: kalkulua II

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} \mathrm{d}x\, L_x G(x,\xi) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} \mathrm{d}x\, \delta(x-\xi) = 1\,.$$

Beste aldetik,

$$\begin{aligned}
\int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} \mathrm{d}x\, L_x G(x,\xi) &= \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} \mathrm{d}x\ \left[a_0\partial_x^2 G + a_1\partial_x G + a_2 G\right] \\
&= \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} \mathrm{d}x\ \{\partial_x\left[a_0(x)\partial_x G(x,\xi)\right. \\
&\qquad \left. + \left(a_1(x) - a_0'(x)\right)G(x,\xi)\right] \\
&\qquad\quad + \left(a_2(x) - a_1'(x) + a_0''(x)\right)G(x,\xi)\}\ .
\end{aligned}$$

Green-en funtzioak: kalkulua II

Ondorioz:

$$a_0(\xi)\left\{\left[\partial_x G(x,\xi)\right]_{x=\xi^+} - \left[\partial_x G(x,\xi)\right]_{x=\xi^-}\right\} = 1$$

or

$$a_0(\xi)\left[\partial_x y_>(x,\xi) - \partial_x y_<(x,\xi)\right]_{x=\xi} = 1\,.$$

Dena dela, A, B, C eta D koefizienteek lau ekuazio lineal aljebraiko bete behar dituzte.

Green-en funtzioak: kalkulua II

$$\begin{aligned} y_1'(\xi)A + y_2'(\xi)B - y_1'(\xi)C - y_2'(\xi)D &= \frac{-1}{a_0(\xi)} \\ y_1(\xi)A + y_2(\xi)B - y_1(\xi)C - y_2(\xi)D &= 0 \end{aligned}$$

eta mugalde baldintzak.

Lau ekuazio lineal hauek osatutatko sistema inhomogeneoak soluzio bakarra izateko, dagokion determinantea ezberdin zero izan behar da. Hain zuzen ere, hori da 0 balio propioa *ez* izateko baldintza!.

Adibidea: Green-en funtzioaren kalkulua

$$Ly = y'' , \qquad y(0) = y(\pi) = 0 .$$

$y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x$

$$\begin{aligned} 0\cdot A + 1\cdot B - 0\cdot C - 1\cdot D &= -1 \\ 1\cdot A + \xi\cdot B - 1\cdot C - \xi\cdot D &= 0 \\ 1\cdot A + 0\cdot B \qquad\qquad &= 0 \\ 1\cdot C + \pi\cdot D &= 0 \end{aligned}$$

Adibidea jarr.

Determinantea:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & \xi & -1 & -\xi \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \pi \end{vmatrix} = -\pi$$

. Soluzio bakarra: $A = 0$, $B = (\xi - \pi)/\pi$, $C = -\xi$, $D = \xi/\pi$

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{(\xi-\pi)x}{\pi} & 0 \le x \le \xi \\ \frac{(x-\pi)\xi}{\pi} & \xi \le x \le \pi \end{cases}$$

Adibidea jarr.

Beste adierazpen bat:

$$G(x,\xi) = \theta(\xi - x)\frac{(\xi-\pi)x}{\pi} + \theta(x-\xi)\frac{(x-\pi)\xi}{\pi} .$$

(Erabilgarria egiaztatzeko, $\theta'(\xi - x) = -\delta(x - \xi)$ erabiliz.)

$y'' = x$, $y(0) = y(\pi) = 0$ baldintzekin:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^\pi \mathrm{d}\xi\, G(x,\xi)\xi \\ &= \int_0^x \mathrm{d}\xi\, \frac{(x-\pi)\xi}{\pi}\xi + \int_x^\pi \mathrm{d}\xi\, \frac{(\xi-\pi)x}{\pi}\xi \\ &= \frac{1}{6}x\left(x^2-\pi^2\right) \end{aligned}$$

Adibidea, orokortuz

$$y'' + \lambda^2 y = x\,, \qquad y(0) = y(\pi) = 0\,. \qquad (\lambda \neq 0)$$
$$y_1(x) = \sin \lambda x\,, \qquad y_2(x) = \cos \lambda x\,.$$

Mugalde baldintzak:

$$B = 0\,, \qquad C \sin \lambda\pi + D \cos \lambda\pi = 0\,.$$

Jarraitasuna eta jauzia

$$\begin{aligned} A \sin \lambda\xi - C \sin \lambda\xi - D \cos \lambda\xi &= 0\,. \\ \lambda\left[C \cos \lambda\xi - D \sin \lambda\xi - A \cos \lambda\xi\right] &= 1\,. \end{aligned}$$

Determinantea $\lambda \sin \lambda\pi$: soluzio bakarra, baldin eta $\lambda \neq 1, 2 \ldots$ bada.

Adibidea, orokortuz

$$\begin{aligned} G(x,\xi) &= \frac{-1}{\lambda \sin \lambda\pi}\left[\theta(\xi - x)\sin \lambda x \sin \lambda(\pi - \xi) + \right. \\ &\qquad \left. \theta(x-\xi)\sin \lambda\xi \sin \lambda(\pi - x)\right]\,. \end{aligned}$$

$$\int_0^\pi \mathrm{d}\xi\, G(x,\xi)\xi = \frac{x}{\lambda^2} - \frac{\pi \sin \lambda x}{\lambda^2 \sin \lambda\pi}\,.$$

Green-en funtzio orokortuak and funtzio propioak

Biz G_λ $L - \lambda$ alderantzizkoa. Hau da

- G_λ funtzioak λ aldagaiarekiko menpekotasuna du, eta horri dagokionez, λ_n singularitateak (poloak) L eragilearen balio propioak dira.
- $\lim_{\lambda\to\lambda_n}(\lambda_n - \lambda)G_\lambda = A(\xi)y_n(x)$, non y_n funtzio propioa den
- $\rho(\xi) \sim A(\xi)/\overline{y_n(\xi)}$

Adibidea

$$Ly = -y'' \,,\; y(0) = y(\pi) = 0\,; \qquad (L-\lambda)G(x,\xi;\lambda) = \delta(x-\xi)$$

Ekuazio diferentzialaren soluzio partikularra: $-\sin\left[\sqrt{\lambda}(x-\xi)\right]\theta(x-\xi)/\sqrt{\lambda}$.

$$G(x,\xi;\lambda) = -\frac{\sin\left[\sqrt{\lambda}(x-\xi)\right]}{\sqrt{\lambda}}\theta(x-\xi) + \frac{\sin\left[\sqrt{\lambda}x\right]\sin\left[\sqrt{\lambda}(\pi-\xi)\right]}{\sqrt{\lambda}\sin\left[\sqrt{\lambda}\pi\right]}\,.$$

Adibidea jarr.

Singularitateak: Itxurazko singularitatea $\lambda = 0$

$$\lim_{\lambda\to 0} G(x,\xi;\lambda) = -(x-\xi)\theta(x-\xi) + \frac{x(\pi-\xi)}{\pi}\,.$$

Benetakoak: $\lambda \to \lambda_n = n^2$ zenbaki naturala

$$\lim_{\lambda->\lambda_n}(\lambda_n-\lambda)G(x,\xi;\lambda) = \frac{2}{\pi}\sin(nx)\sin(n\xi)\,.$$