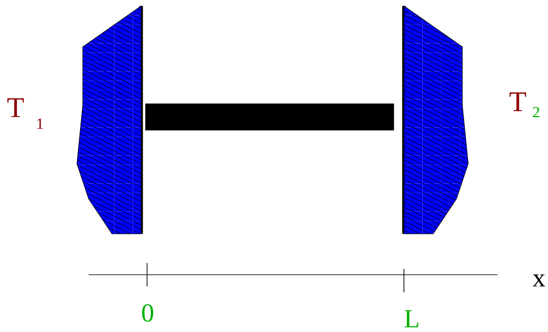
Atala III

Deribatu Partzialetako Ekuazioak eta Aldagaien banantzea

7 Sarrera

Adibidea: bero eroalpena



Adibidea: bero eroalpena

Zeharkako dimentsioak $\ll L$, dimentsio bateko hurbilketa: $u(x,t)$ tenperatura eremua.

Bero eroalpen ekuazioa:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \, .$$

Hastapen baldintza: $u(x,0) = f(x)$.

Mugalde baldintzak: bi muturretan baino termikoa, tenperatura konstanteak:

$$u(0,t) = T_1 \, , \qquad u(L,t) = T_2 \, .$$

Problema: lortu $u(x,t)$, $\forall x \in [0,L]$ eta $t \geq 0$: bero eroalpen ekuazioaren soluzia, hastapen baldintzaren eta mugalde baldintzen pean.

Adibidea: bero eroalpena

Ideia: gainezarmena. Ez zuzenean: mugalde baldintza desegokiak. Aldagai dependentearen aldaketa:

$$\omega(x,t) = u(x,t) - T_1 - (T_2 - T_1)\frac{x}{L}$$

edo

$$w(x,t) = u(x,t) - T_1 - (T_2 - T_1)\frac{x^2}{L^2} \, ,$$

edo

$$v(x,t) = u(x,t) - g(x)$$

non $g(0) = T_1$ eta $g(L) = T_2$ diren.

Adibidea: bero eroalpena

Azken aukerarekin, hastapen baldintzapeko problema honela aldatzen da:

$$\begin{aligned} v_t &= \alpha^2 v_{xx} + \alpha^2 g''(x)\,, \\ v(x,0) &= f(x) - g(x)\,, \\ v(0,t) &= 0\,, \\ v(L,t) &= 0\,, \end{aligned}$$

mugalde baldintza homogeneoekin.

Adibidea: bero eroalpena - Banantze problema

Beste problema bat, ezberdina baina aurrekoari lotua, erabiliko dugu bere soluzioa eraikitzeko: *aldagai bananduen problema*. Hastapen baldintzaren ordez, beste baldintza bat sartuko dugu: *banantzea*. Honezaz gain, gai inhomogeneoa ahaztuko dugu. Hori bai, *mugalde baldintzak* mantentzen ditugu.

$$\begin{aligned} z_t &= \alpha^2 z_{xx}\,, \\ z(x,t) &= X(x)T(t)\,, \\ z(0,t) &= 0\,, \\ z(L,t) &= 0\,. \end{aligned}$$

Problema: Tribiala ez den soluziorik existitzen al da? Soluzioak: 1) ekuazio homogeneoaren soluzioak; 2) mugalde baldintzak betetzen dituzte; 3) modu normalak dira (denborarekiko eboluzioa berbera dugu puntu guztietan!)

Adibidea: bero eroalpena - Banantze eta mugalde baldintzak

Ordezkatu banantze baldintza bai ekuazioan baita mugalde baldintzetan ere:

$$X(x)\dot{T}(t) = \alpha^2 X''(x)T(t)\,, \qquad X(0)T(t) = 0 = X(L)T(t)\,.$$

Soluzioa tribiala ez izateko, $T(t)$ funtzioak ezin du identikoki nulua izan. Beraz,

$$X(0) = X(L) = 0\,.$$

Adibidea: bero eroalpena - Banantzea eta ekuazio homogeneoa

Arrazoi bera dela eta, t^* unean $T(t^*) = 0$ izango balitz, $\dot{T}(t^*)$ nulua izan behar da. Beraz, nahiz eta, agian, $\dot{T}(t)/T(t)$ puntu guztietan definituta ez egotea, t^* puntu berezietan limitea existituko da. Eta konstante da:

$$\alpha^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = -\lambda^2\alpha^2\,.$$

[Ez dago inolako funtsezko arrazoirik *banantze konstantearen izena* $-\lambda^2$ beti izateko; adibide honetan emaitza ezaguna delako badakigu izen hori erabilgarria izango dela]

Adibidea: bero eroalpena - Sturm-Liouville

$$X'' + \lambda^2 X = 0\,, \qquad X(0) = X(L) = 0\,.$$

Dakigunez, tribiala ez den soluzioa ez da beti existituko. Kasu honetan, soilik $\lambda \in \{\lambda_n = n\pi/L\}$ multzoan egonez gero tribialak ez diren soluzioak egongo dira, $X_n(x) = \sin n\pi x/L$ funtzioen proportzionalak hain zuzen ere. *Hau Sturm - Liouville-ren oinarri propioa da*; ondorioz: ideia: garatu *hasierako probleman, mugalde baldintza egokiekin*, x aldagaiaren funtzio *guztiak* oinarri honetan. I.e.,

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}\,,\; g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}\,,$$

eta f era berean.

Adibidea: bero eroalpena - Oinarri propioan garatzea

Trukatu dugu bi aldagaien funtzio ezezagun bat, $v(x,t)$, aldagai bakarreko $c_n(t)$ funtzio multzoarekin. f_n eta g_n zuzenean kalkulagarriak dira:

$$f_n = \frac{2}{L} \int_0^L \mathrm{d}x\, f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

eta g_n modu antzekoan.

Sartu garapenak ekuazioan eta hastapen baldintzetan, eta erabili ortogonalitatea:

$$\begin{aligned} \dot{c}_n &= -\alpha^2 \frac{n^2\pi^2}{L^2} c_n - \alpha^2 \frac{n^2\pi^2}{L^2} g_n\,, \\ c_n(0) &= f_n - g_n\,. \end{aligned}$$

Adibidea: bero eroalpena - AB soluzioa

$$c_n(t) = (f_n - 2g_n)\, e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t/L^2} + g_n\,.$$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}\,.$$

$$u(x,t = v(x,t) + g(x)\,.$$

Adibidea: bero eroalpena - g jakin bat

Hartu $g(x) = T_1 + (T_2 - T_1)x/L$. Ondorioz

$$g_n = \frac{2}{n\pi}\left[T_1 - (-1)^n T_2\right]\,.$$

Adibidea: bero eroalpena - fisikarion ikuspuntua

Ahaztu hasierako probleman hastapen baldintza. Soluzio egonkorrik al dago? Hau da, ondokoaren soluzioa:

$$\xi''(x) = 0\,, \quad \xi(0) = T_1\,,\, \xi(L) = T_2\,.$$

Bai: $\xi(x) = T_1 + (T_2 - T_1)x/L$. Beraz $u(x,t) - \xi(x) \to 0$ doa $t \to \infty$ doanean, hau da,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \sin \frac{n\pi x}{L}\,,$$

eta, hastapen baldintza betetzeko, $\beta_n = f_n - \xi_n$. Azkenean:

$$u(x,t) = \xi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[f_n - \frac{2}{n\pi}\left(T_1 - (-1)^n T_2\right) \right] e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \sin \frac{n\pi x}{L}\,.$$

2. Adibidea: bero eroalpena eraztunean

L luzerako eraztun bero-eroalea, hastapen tenperatura distribuzioa $f(x)$ (periodikoa, L periododuna). Problema:

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx}\,, \\ u(x,0) &= f(x)\,, \\ v(0,t) &= v(L,t)\,, \\ v_x(0,t) &= v_x(L,t)\,, \end{aligned}$$

garatu Fourier-en seriea:

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n \cos \frac{2\pi n x}{L} + \beta_n \sin \frac{2\pi n x}{L} \right]\,.$$

$$u(x,t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n(t) \cos \frac{2\pi n x}{L} + b_n(t) \sin \frac{2\pi n x}{L} \right]\,.$$

2. Adibidea: bero eroalpena eraztunean

Ordezkatu ekuazioan eta hastapen baldintzan:

$$\dot{a}_0 = 0\,, \quad \dot{a}_n = -\frac{4n^2\pi^2\alpha^2}{L^2} a_n\,, \quad \dot{b}_n = -\frac{4n^2\pi^2\alpha^2}{L^2} b_n\,.$$

$$a_n(0) = \alpha_n\,, \qquad b_n(0) = \beta_n\,,$$

beraz, soluzioa ondokoa da:

$$u(x,t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n \cos \frac{2\pi n x}{L} + \beta_n \sin \frac{2\pi n x}{L} \right] e^{-4n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2}\,.$$

8 Metodoaren deskribapena

Metodoaren deskribapen orokorra

- Menpeko aldagaia aldatu gainezarmenak onartzen dituzten mugalde baldintzak lortzeko.
- Lortu aldagai baten (edo batzuen!) menpeko funtzioak garatzeko oinarri propio egokia.
- Garatu funtzio horiek (guztiak!) oinarri propioan.
- Hasierako problemaren baliokidea den (aldagai independente gutxiagoko) deribatu partzialetako ekuazio multzoa edo ekuazio diferentzial arrunten multzoa
- Berriz egin ekuazio arrunten multzoa lortu arte. Ebatzi, ordezkatu.

Deskribapen xehatuagoa

1. Saiatu mugalde baldintza “ezkutatuak”ikusten.
2. Zeintzuk dira mugalde baldintzak (baldintzen artean)?
3. Mugalde baldintzak ”homogeneizatu”/ periodiko bihurtu / apaindu.
4. Lortutako problema berri honetatik, idatzi *beste* problema bat, non hastapen baldintzen ordez *banantze baldintza* agertzen den.
5. Problema bananduaren soluzio ez-tribialak lortu.
6. Horrela SL problema sorta bat sortzen da: kalkulatu oinarri propioa
7. Alboratu orain problema banandua, eta erabili oinarri propioa mugalde baldintza egokiak dituen probleman.

Caveat

1. Aldagaien banantzea koordenatu sistema berezietan soilik dabil ondo. Metodoa erabiltzeko agian aldagai aldaketa beharrezkoa izango da.
2. Lotutako SL eragilea zein den jakitea komenigarria izan daiteke, baina ez da beharrezkoa. Erabakigarria da, beste aldetik, oinarri ortogonal egokia lortzea; egokia DPErekiko eta mugalde baldintzekiko. Banantze prozesua eta SL eragilearen identifikazioa erabilgarria izan daiteke oinarri ortogonal egokia lortzeko, erabilgarria soilik.
3. Per se, problema banandua ez da erabilgarria. Izatez, hasierako problema inhomogeneoa bada, ez da batere erabilgarria: soluzio bananduak onak dira ekuazio homogeneoentzat soluzioa eraikitzeko. Gai inhomogeneoari dagokionez oinarri propioan garatu behar dugu.

9 Mugalde baldintza ezkutatuak

Mugalde baldintza ezkutatuak: adibidea - Laplacearra, koordenatu polarretan

$$\nabla^2 u(x,y) = 0\,, x^2+y^2 \leq R^2$$

$$u(x,y)|_{x^2+y^2=R^2} = f\left(\mathrm{actan}(y/x)\right)\ .$$

Hobeto polarretan: $u(x,y) = v(r,\theta)$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial v}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0\,, r\in[0,R)\,, \theta\in[0,2\pi)\,,$$

$$v(R,\theta) = f(\theta)\,.$$

Adibidea, jarr.

Lehenengo baldintza ezkutatuta: periodikotasuna. Fourier-en garapena:

$$v(r,\theta) = \frac{1}{2}A_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n(r)\cos(n\theta) + B_n(r)\sin(n\theta)\right]\ ,$$

$$f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta)\right]\ .$$

Beraz,

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}A_n}{\mathrm{d}r}\right] - \frac{n^2}{r^2}A_n = 0\,, \quad A_n(R) = a_n\,,$$

eta B_n era berean.

Adibidea, jarr.

Euler-en ekuazioa; $n \neq 0$ kasuan, ekuazioaren soluzio orokorra:

$$A_n(r) \to \alpha r^n + \beta r^{-n}\,, \qquad A_0(r) \to \alpha + \beta\ln r\,.$$

2. baldintza ezkutatua: $r=0$ puntuan erregularra izatea.

Maths Mugalde baldintza singularra: $\rho(r) = r$, $\rho a_0 \sim r^2$.

Phys Ez dago arrazoi fisikorik zentruan singularitatea izatea.

Adibidea: soluzioa

$$v(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{r^n}{R^n} \cos{(n\theta)} + b_n \frac{r^n}{R^n} \sin{(n\theta)} \right] ,$$

era esplizituagoan:

$$\begin{aligned} v(r,\theta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\sigma\, f(\sigma) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{r}{R} \right)^n \cos n(\theta-\sigma) \right] - \frac{1}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\sigma\, f(\sigma) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta-\sigma)} \, . \end{aligned}$$

Adibidea, era sistematikoan

Problema banandua:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r \frac{\partial z}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} &= 0 \, , \\ z(r,\theta) &= \rho(r)\Theta(\theta) \end{aligned}$$

Badirudi beste baldintzarik ez dagoela...badago: periodikotasuna $\Theta(\theta)$ funtzioan (koordenatu sistemaren ondorioa!).

Ekuazio bananduak

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -\frac{r}{\rho(r)} \left[r\rho'(r) \right]' = -\lambda^2 \, .$$

SL problema:

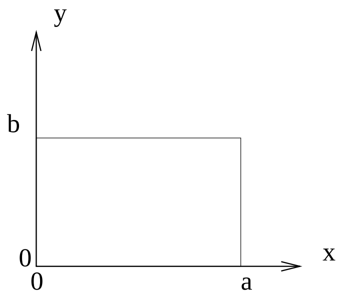
$$\Theta'' + \lambda^2 \Theta = 0 \, , \qquad \Theta(0) = \Theta(2\pi) \, , \, \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \, .$$

10 Beste kuestio batzuk

Banantzeen kateaketa

$$\partial_t u = \nabla^2 u \, , u(x,y,t) \, , \, 0 \le x \le a \, , 0 \le y \le b \, ; \, u(x,y,0) = g(x,y) \, ;$$

$$u(0,y,t) = u(a,y,t) = u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0 \, .$$



Kateaketa II

Problema banandu berria:

$$\partial_t z = \nabla^2 z\,, \quad z(x,y,t) = A(x,y)T(t)\,;$$

$$z(0,y,t) = z(a,y,t) = z(x,0,t) = z(x,b,t) = 0\,.$$

Beraz,

$$\frac{\dot{T}}{T} = \frac{1}{A}\nabla^2 A = -\lambda^2\,,$$
$$A(0,y) = A(a,y) = A(x,0) = A(x,b) = 0\,.$$

Kateaketa III

Problema berria: Nolakoa izan behar da λ ondoko problemak tribiala ez den soluziorik izateko?

$$\nabla^2 A + \lambda^2 A = 0\,, \qquad (\text{Helmholtz}'\ \text{equation})$$

$$A(0,y) = A(a,y) = A(x,0) = A(x,b) = 0\,.$$

Berriro banantzea: problema hau eta banantzea, $A(x,y) = X(x)Y(y)$

Kateaketa IV

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2 + \frac{Y''}{Y} = -\mu^2$$
$$X(0) = X(a) = Y(0) = Y(b) = 0$$

1. SL problema : μ nolakoa izan behar da ondokoaren soluzio ez-tribialik existitzeko:

$$X'' + \mu^2 X = 0\,, X(0) = 0 = X(a)$$

Balio multzoa, $\mu_n = n\pi/a$, eta $X_n(x) = \sin n\pi x/a$.

Kateaketa V

SL2: eta Y? Nolakoa izan behar da λ ondoko problema *multzoak* tribiala ez den soluziorik izateko?

$$Y'' + (\mu_n^2 - \lambda^2)Y = 0\,, Y(0) = 0 = Y(b)$$

Indize multzo bikoitza: $\lambda_{nm}^2 = (m^2/b^2 + n^2/a^2)\pi^2$, eta $Y_m(y) = \sin m\pi y/b$.

Kateaketa VI

Beraz,

$$A_{nm}(x,y) = \sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\;;$$
$$\lambda_{nm}^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}$$

Hauxek dira Dirichlet mugalde baldintzapeko laukizuzenean Laplace-arraren funtzio eta balio propioak.

Kateaketa, amaiera

Hasierako problemara, berriro: garatu u eta g:

$$g_{nm} = \frac{2}{ab}\int_0^a \mathrm{d}\xi \int_0^b \mathrm{d}\eta\, g(\xi,\eta)\sin\frac{n\pi\xi}{a}\sin\frac{m\pi\eta}{b}\,,$$
$$g(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} g_{nm}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\,.$$
$$u(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{nm}(t)\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\,.$$

Kateaketa, amaiera

Ordezkatu ekuazioan eta hastapen balioaren baldintzan:

$$\dot{u}_{nm} = -\lambda_{nm}^2 u_{nm}\,; \qquad u_{nm}(0) = g_{nm}\,.$$

Ondorioz:

$$u(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} g_{nm}e^{-\lambda_{nm}^2 t}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\,.$$

11 AB garrantzitsuen katalogoa

11.1 Koordenatu polarrak

Bero eroalpen ekuazioa koordenatu polarretan

$$\gamma^2\nabla^2 u = u_t\,, \qquad u(r,\theta,0) = g(r,\theta)\,, \quad u(a,\theta,t) = 0\,.$$

Baldintza ezkutatua: θ aldagaiarekiko periodikotasuna:

$$g(r,\theta) = \frac{\alpha_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n(r)\cos n\theta + \beta_n(r)\sin n\theta\right]\;;$$

$$u(r,\theta,t) = \frac{A_0(r,t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n(r,t)\cos n\theta + B_n(r,t)\sin n\theta\right]\;;$$

Bero eroalpen ekuazioa koordenatu polarretan

$$\gamma^2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_n}{\partial r}\right) - \frac{n^2}{r^2}A_n\right] = \frac{\partial A_n}{\partial t}\,,$$

$$A_n(r,0) = \alpha_n(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, g(r,\theta)\cos\theta\,;$$

$$A_n(a,t) = 0\,.$$

eta $B_n(r,t)$ funtzioekin era berean.

Orain berriro aldagaien banantzea

Bero eroalpen ekuazioa koordenatu polarretan

Banantze problemen *multzo* berri bat:

$$\gamma^2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial z_n}{\partial r}\right) - \frac{n^2}{r^2}z_n\right] = \frac{\partial z_n}{\partial t}\,,$$

$$z_n(r,t) \to R(r)T(t)\,;\, z_n(a,t) = 0\,.$$

Eta hemendik ...

Bero eroalpen ekuazioa koordenatu polarretan

$$\frac{\gamma^2}{rR}\left(rR'\right)' - \frac{\gamma^2 n^2}{r^2} = \frac{\dot{T}}{T} = -\lambda^2\gamma^2$$

Hau dela eta

$$\frac{1}{r}\left(rR'\right)' + \left(\lambda^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R = 0\,,\; R(a) = 0\,.$$

Mugalde baldintza baten faltan? Ez: erregulartasunaren hipotesi ezkutatua. *Ekuazioaren* soluzio orokorra:

$$R \to c_1 J_n(\lambda r) + c_2 Y_n(\lambda r)\,.$$

c_2 nulua, erregularra izateko.

Bessel-en funtzioen garapenak

Balio propioen ekuazioa:

$$J_n(\lambda a) = 0\,.$$

Balio propioen ekuazioaren soluzioa: biz $\xi_k^{(n)}$ zenbakia J_n funtzioaren k-garren erroa. Soluzio ez tribial existitzen da baldin eta $\lambda \in \{\xi_k^{(n)}/a\}_{k=1}^{\infty}$ badago, funtzio propioak $J_n(\xi_k^{(n)} r/a)$. $f(r)$ funtzioaren garapenak: haztapena r dugu;

$$f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{a^2 J_{n+1}^2\left(\xi_k^{(n)}\right)} \int_0^a \mathrm{d}s\, s f(s) J_n\left(\frac{\xi_k^{(n)} s}{a}\right)\right] J_n\left(\frac{\xi_k^{(n)} r}{a}\right)\,.$$

11.2 Bessel-en funtzioei buruzko interludioa

Bessel-en funtzioei buruzko interludioa

$$x J_\nu^2(x) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(x^2 - \nu^2\right) J_\nu^2(x) + x^2 \left(J_\nu'(x)\right)^2\right]\,,$$

Bessel-en ekuazioa erabiliz;

$$x J_\nu'(x) = \nu J_\nu(x) - x J_{\nu+1}(x)\,,$$

funtzio sortzailea erabiliz, edo J_ν funtzioaren berretura seriea:

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}\,.$$

Bessel-en funtzioak: gehigarriak

$$\begin{aligned}
\int_0^a \mathrm{d}r\, r J_n^2\left(\frac{\xi_k^{(n)} r}{a}\right) &= \frac{a^2}{\left(\xi_k^{(n)}\right)^2}\int_0^{\xi_k^{(n)}} \mathrm{d}s\, s J_n^2(s) \\
&= \frac{a^2}{2}\left[J_n'\left(\xi_k^{(n)}\right)\right]^2 \\
&= \frac{a^2}{2} J_{n+1}^2\left(\xi_k^{(n)}\right)
\end{aligned}$$

11.3 Berriro polarrak

Bero eroalpen ekuazioa koordenatu polarretan

$$A_n(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}(t) J_n\left(\frac{\xi_k^{(n)} r}{a}\right)\,,$$

$$\dot{a}_{nk} = -\gamma^2 \left(\frac{\xi_k^{(n)}}{a}\right)^2 a_{nk}\,;$$

$$a_{nk}(0) = \frac{2}{a^2 J_{n+1}^2\left(\xi_k^{(n)}\right)} \int_0^a \mathrm{d}s\, s\alpha_n(s) J_n\left(\frac{\xi_k^{(n)} s}{a}\right)$$

12 Harmoniko esferikoak

Harmoniko esferikoak

Askotan, lehen banantze prozesua egin ondoren, $\nabla^2 u + \lambda^2 u = 0$ aztertu behar dugu. Hain zuzen ere, galdera hau da: nolakoa izan behar da λ ekuazio horrek tribiala ez den soluziorik izateko, mugalde baldintzen pean?

Aurrean dugun probleman simetria esferikoa agertzen bada, baldintza batzuk ezkutatuak dira.

Harmoniko esferikoak

Koordenatu esferikoak: $r \geq 0$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Lehenengo MB ezkutatua: φ-rekiko periodikotasuna. Fourier-en garapena

$$\begin{aligned} u(r,\theta,\varphi) &= \frac{a_0(r,\theta)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(r,\theta)\cos n\varphi + \\ &\quad b_n(r,\theta)\sin n\varphi\,]\;. \end{aligned}$$

edo

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(r,\theta) e^{in\varphi}\,.$$

Koordenatu esferikoak: Laplacearra

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r u\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta u\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\varphi^2 u\,.$$

So

$$\begin{aligned} \nabla^2 u + \lambda^2 u = 0 \quad \Rightarrow \quad & \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r c_n\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta c_n\right) \\ & + \left(\lambda^2 - \frac{n^2}{r^2\sin^2\theta}\right)c_n = 0\,. \end{aligned}$$

Banantzea, berriro

Saiatu arestian ikusitako ekuazioan $c_n \to R(r)\Theta(\theta)$ forman. Hots,

$$-\frac{\left(r^2 R'\right)'}{R} = \frac{(\sin\theta\,\Theta')'}{\Theta\sin\theta} + \lambda^2 - \frac{n^2}{\sin^2\theta} = -\gamma + \lambda^2\,,$$

eta ondorioz

$$\frac{(\sin\theta\,\Theta')'}{\sin\theta} - \frac{n^2}{\sin^2\theta}\Theta + \gamma\Theta = 0\,.$$

Mugalde baldintzak?

Aldagai aldaketa: $t = \cos\theta$, $P(t) = \Theta(\theta)$.

Hasi $n = 0$ kasuan.

12.1 Legendre-ren polinomioak

Legendre-ren polinomioak

$$\left[\left(1-t^2\right)P'\right]' + \gamma P = 0\,.$$

1 punturen inguruko berretura seriea:

$$P(t) \to \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (1-t)^{\mu+k}$$

Indizea μ: 0, bikoitza. Soluzio bat: logaritmikoa. Baztertu, ez da erregularra $t \to 1$!!

Errekurrentzi erlazioa:

$$\alpha_{k+1} = \frac{k(k+1)-\gamma}{2(k+1)^2}\alpha_k\,.$$

Legendre-ren polinomioak

Konbergentzia: $|1-t| < 2$ tartean konbergentea

$k+1 > \gamma$ kasuan,

$$\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} > \frac{1}{2}\frac{k-1}{k+1}\,.$$

Beraz, $t = -1$ puntuan dibergente! Baldin eta...

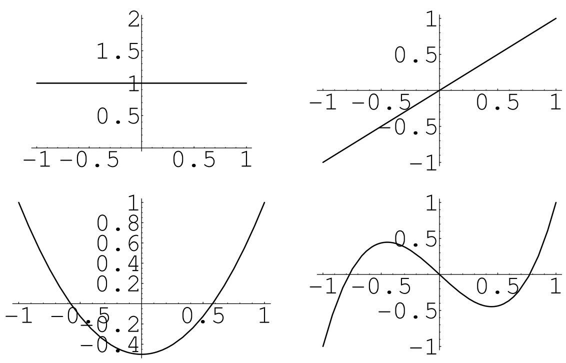
Baldin eta $\gamma = l(l+1)$ bada, non l osoa den, konbergentea da: seriea mozten da eta polinomio bat dugu.

Hau da:

$$P_l(t) = \sum_{k=0}^{l} \frac{(l+k)!}{(l-k)!\,(k!)^2\,2^k}(-1)^k(1-t)^k\,.$$

[Normalizazioaren hitzarmena: $P_l(1) = 1$]

Legendre-ren polinomioak



Rodrigues-en formula

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \left(x^2 - 1\right)^l \, .$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \left(x^2 - 1\right)^l &= \frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} (x-1)^l \, (x - 1 + 2)^l \\
&= \frac{1}{2^l l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} (x-1)^l \sum_{k=0}^{l} \left(\begin{array}{c} l \\ k \end{array} \right) (x-1)^k 2^{(l-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{l} \frac{(l+k)!}{(l-k)! \, (k!)^2 \, 2^k} (-1)^k (1-x)^k \, .
\end{aligned}$$

Haztapena: 1.

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}t \, P_l(t) P_k(t) = \frac{2}{2l+1} \delta_{lk} \, .$$

[froga: SL eragilea; bestela: zatikako integrazioa, Rodrigues-en formularekin]

12.2 Legendre-ren funtzio asoziatuak

Legendre-ren funtzio asoziatuak

$[n \neq 0]$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[(1 - t^2) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P(t) \right] + \left(\gamma - \frac{n^2}{1 - t^2} \right) P(t) = 0 \, .$$

Erabili

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \left[f(t) g(t) \right] = \sum_{n=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ n \end{array} \right) f^{(n)}(t) g^{(k-n)}(t)$$

ondokoan:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(1-t^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\right]+\gamma f(t)=0\,.$$

$$(1-t^2)f^{(m+2)}(t)-2(m+1)tf^{(m+1)}(t)+(\gamma-m(m+1))f^{(m)}(t)=0\,.$$

Legendre-ren funtzio asoziatuak

Aldagai dependentea aldatu, $f^{(m)}(t)=g(t)/(1-t^2)^{m/2}$. Demagun f Legendre-ren ekuazioaren soluzioa dela, $n=0$ kasuan. Hau honela izanda, g ondokoaren soluzioa da,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(1-t^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(t)\right]+\gamma g(t)-\frac{m^2}{1-t^2}g(t)=0\,.$$

Legendre-ren ekuazioaren soluzio orokorrak singularitate logaritmikoa du $t=1$ puntuan. Deribazioaz, berretura singularra sortzen du horrek. Ondorioz, $t=1$ puntuan g erregularra izateko f-n singularitate logaritmikoaren koefizienteak nulua izan behar du.

Legendre-ren funtzio asoziatuak

γ parametroa $l(l+1)$ formakoa ez bada, non l naturala den, $t=-1$ puntuan ere singularitatea agertzen da, eta g funtzioak jaraunsten du. Beraz, muturretan erregularra eta aldi berean tribiala ez den soluziorik izateko, γ parametroak $l(l+1)$ formakoa izan behar du, non l naturala den.

Eta $f\to P_l(t)$ bada, m gehienez l izango da (bestela l ordenako polinomioa l aldiz baino gehiago deribatuz 0 lortzen dugu)

Legendre-ren funtzio asoziatuak

$$\begin{aligned}P_l^m(t) &= (-1)^m(1-t^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}P_l(t)\\ &= \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-t^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^{m+l}}{\mathrm{d}t^{m+l}}(t^2-1)^l\,,\end{aligned}$$

non $l=m,m+1,\ldots$ Adibidez, $l=0$ aukerak $m=0$ ondorio dakar, $P_0^0(t)=1$; $l=1$ kasuan bi aukera ditugu, $m=0$ edo $m=1$:

$$P_1^0(t)=t\,,\qquad P_1^1(t)=-\sqrt{1-t^2}\,.$$

Legendre-ren funtzio asoziatuak

Oharra: literaturan gehien bat bi hitzarmen daude faserako. Hemen erabilitakoak Condon-Shortley-ren fasea kontuan hartzen du (Erabilgarria da gero mekanika kuantikoak goranzko eta beheranzko eragileak bateragarritasunez erabiltzeko). Besteak ez du Legendre-ren funtzio asoziatuetan sartzen bai, ordea, harmoniko esferikoetan.

Abramowitz-Stegun liburuan adibidez azken kasu honetan ondoko notazioa erabiltzen dute: $P_{lm}(x) = (-1)^m P_m^l(x)$.

m negatiboentzat funtzio asoziatua definitua izatea komenigarria da, ondoko moduan:

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$$

non $m \geq 0$. Harmoniko esferikoetan agertuko da.

Legendre-ren funtzio asoziatuak

Ortogonalak: m *jakin batentzat*, l ezberdinek funtzio ortogonalak zehazten dituzte:

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}t \, P_l^m(t) P_k^m(t) = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{lk} \, .$$

Frogapena: zatikako integrazioa, m deribatuak P_k^m funtziotik integrakizunaren beste zatietara pasatuz. Honela integrakizun berrian $P_k(t)$ bider l mailako polinomioa agertuko da. l k baino txikiago bada, berriro zatikako integrazioz integrala nulua dela ikusten dugu. Nulua ez izateko halabeharrezkoa da k eta l berdinak izatea.

12.3 Harmoniko esferikoak

Harmoniko esferikoak

Banantze problemara itzuliz, koordenatu esferikoetan Laplacearraren osagai angeluarraren balio eta funtzio propioen problema ondokoa dugu:

$$r^2 \nabla^2 Y_l^m(\theta, \varphi) = -l(l+1) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

non

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \, .$$

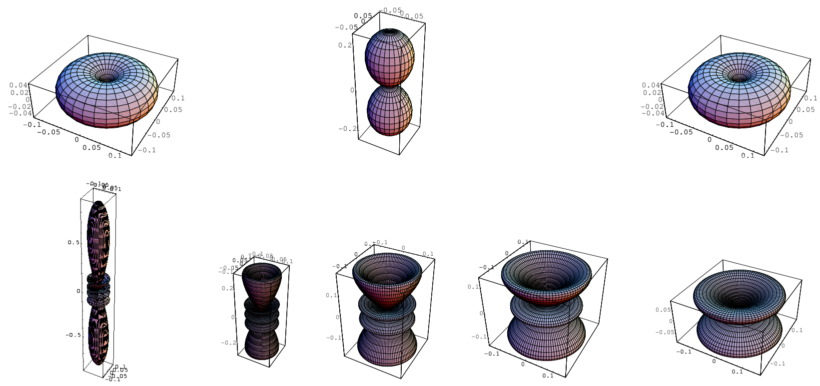
Harmoniko esferikoak: adibideak

$$Y_0^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \, ;$$

$$Y_1^{-1}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\theta e^{-i\varphi} \, , \quad Y_1^0(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \, ,$$

$$Y_1^1(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\theta e^{i\varphi} \, .$$

Harmoniko esferikoak: adibideak



Harmoniko esferikoak: propietateak

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \, \sin\theta \, Y_{l'}^{m'}(\theta,\varphi)^* Y_l^m(\theta,\varphi) \delta_{ll'}\delta_{mm'} \,.$$

$$g(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} c_{lm} Y_l^m(\theta,\varphi) \,,$$

non

$$c_{lm} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \, \sin\theta \, Y_l^m(\theta,\varphi)^* g(\theta,\varphi) \,.$$

Fisikako erabilera bat: CMBR

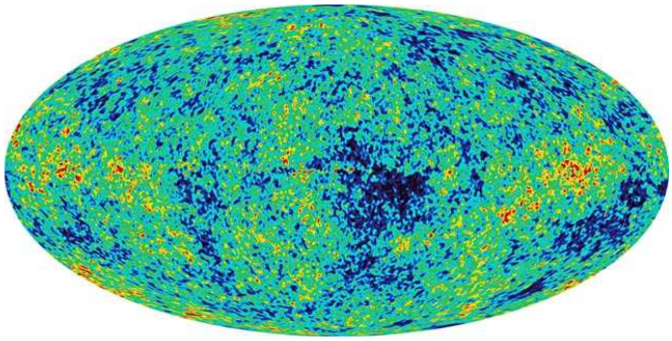
$$\Delta T(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} c_{lm} Y_l^m(\theta,\varphi) \,,$$

m-rekiko menpekotasunik gabe:

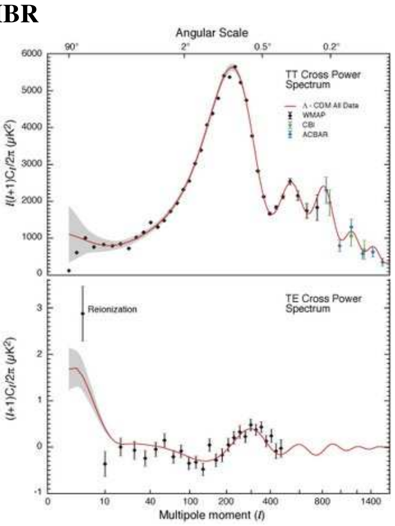
$$C_l = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} |c_{lm}|^2$$

eta $l(l+1)C_l$ marrazten dugu, l-ren funtzio gisa

CMBR



CMBR



CMBR

TT: temperature angular power spectrum

TE: temperature-polarization cross-power spectrum

Harmoniko esferikoak: eragileak

Biz

$$\begin{aligned}
\hat{L}_z &= -i\frac{\partial}{\partial\varphi} = -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) , \\
\hat{L}_x &= i\left[\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\varphi\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] \\
&= -i\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) , \\
\hat{L}_y &= -i\left[\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\varphi\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] \\
&= -i\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) ,
\end{aligned}$$

Harmoniko esferikoak: goranzko eta beheranzko eragileak

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k\,.$$

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y \qquad \hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y$$

$$\begin{aligned}
\left[\hat{L}_+, \hat{L}_-\right] &= 2\hat{L}_z \\
\left[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm\right] &= \pm\hat{L}_\pm
\end{aligned}$$

$$\hat{L}_i = -i\epsilon_{ijk}x_j\frac{\partial}{\partial x_k}$$

Harmoniko esferikoak: Casimir

$$\left[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_i\right] = 0\,.$$

Adierazpen diferentziala:

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\,.$$

Harmoniko esferikoak: aldibereko diagonalizazioa

$$\hat{\mathbf{L}}^2 Y_l^m(\theta,\varphi) = l(l+1)Y_l^m(\theta,\varphi)\,.$$

$$\hat{L}_z Y_l^m(\theta,\varphi) = mY_l^m(\theta,\varphi)\,.$$

Irudi baliokidea

$$\hat{\mathbf{L}}^2(x+iy)^l = l(l+1)(x+iy)^l\,, \qquad \hat{L}_z(x+iy)^l = l(x+iy)^l\,.$$
$$\hat{L}_+(x+iy)^l = 0\,, \qquad \hat{L}_-(x+iy)^l = -2lz(x+iy)^{l-1}\,,$$
$$\hat{L}_z\hat{L}_-^k(x+iy)^l = \hat{L}_-^k\left(\hat{L}_z - k\right)(x+iy)^l = (l-k)\hat{L}_-^k(x+iy)^l\,;$$
$$\hat{\mathbf{L}}^2 L_-^k(x+iy)^l = l(l+1)\hat{L}_-^k(x+iy)^l$$
$$\hat{L}_-^{2l+1}(x+iy)^l = 0\,.$$

Irudi baliokidea

$$(x+iy)^l = r^l\sin^l\theta e^{il\varphi} \propto Y_l^l(\theta,\varphi)\,.$$
$$\hat{L}_\pm Y_l^m(\theta,\varphi) = [l(l+1) - m(m\pm 1)]^{1/2}\, Y_l^{m\pm 1}(\theta,\varphi)\,.$$