1. Newton-en metodoa Demagun $g(x) = 0$ ekuazio algebraikoa ebatzi nahi dugula, zenbakizko iterazio metodoarekin. Hurbilketen segida $x_{n+1} = x_n + \Delta_n$ errekurrentziaren bidez adieraziko dugu. Hurbilketa gero eta hobea izateko, $g(x_{n+1})$ balioak txikia izan behar du. Beste aldetik, $g(x_{n+1}) = g(x_n) + g'(x_n)\Delta_n + O(\Delta_n^2)$. Horrexegatik, $\Delta_n = -g(x_n)/g'(x_n)$ forman hartuko dugu, eta, ondorioz,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}\,.$$

Kalkula itzazu $x^2 - 3x + 2 = 0$ ekuazioaren soluzioak.
Kalkula ezazu $x - 2\sin x = 0$ ekuazioaren soluzioa, $x_0 = 2$ puntuaren inguruan.

2. Garapen perturbatiboaren bidez, ebatzi $x^3 + (4+\epsilon)x^2 + 5x + 2 = 0$ ekuazioa $x_0 = -2$ puntuaren inguruan (ϵ zenbakia txikia da). Zer gertatuko litzateke $x_0 = -1$ puntuaren inguruko garapen perturbatiboarekin? (*Iradokizuna:* aztertu $(x+1)^2 + \epsilon x^2 = 0$ ekuazioa, gertatzen dena hobeto ulertzeko.)

3. $z^2 - 2\epsilon z - 2\epsilon = 0$ ekuazioa garapen perturbatibo arrunt baten bidez askatu ahal duzu? Zergatik (edo zergatik ez)? Saiatu $z = \epsilon^p w$ aldagai aldaketa erabiltzen.

4. Garapen perturbatiboaren bidez, ebatzi

$$y'' + (1+\epsilon x)y = 0\,, \qquad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1\,.$$

Egokia al da garapena $x > 1/\epsilon$ denean?

5. Garapen perturbatiboaren bidez, ebatzi

$$y'' - y' + \epsilon y^2 = 0\,, \qquad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,,$$

ϵ^2 ordenaraino.

6. Erabil ezazu Lindstedt-Poincaré-ren metodoa ondoko problema ebazteko:

$$y'' + y + \epsilon y|y| = 0\,, \qquad |\epsilon| \ll 1\,, \quad x > 0\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,.$$

7. Merkurioren prezesioa kalkulatzeko, Binet-en ekuazio orokortua aztertuko dugu:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2\,.$$

Azken gaia perturbazioa dela emango dugu. m Eguzkiaren masa da, eta h planetaren momentu angeluarrarekin lotuta dago. Lindstet-en metodoa erabiliz, kalkula ezazu prezesioa.

8.* (**Ariketa zaila**) Demagun soka homogeneo baten puntu batean m masako masa txiki bat jarri dugula. Sokaren muturrak finkoak dira, eta soka gehi masa sistema tentsiopean dago, tentsioa τ izanik.
1.- Froga ezazu oszilazio txikien hurbilketan $u(x,t)$ sokaren desplazamendu bertikalak

$$\rho(x)u_{tt} = \tau u_{xx}$$

ekuazioa betetzen duela, non

$$\rho(x) = \rho_0 + m\delta(x-a)$$

sistemaren dentsitate lineala den, ρ_0 soka homogeneoaren dentsitate lineala delarik.

2.- Modu normalak aztertu nahi ditugu orain. Hau da, $u(x,t)$ funtzioa $v(x)e^{-i\omega t}$ forman idatzi. v funtzioak ondoko mugalde baldintzak bete behar ditu: $v(0) = v(b) = 0$. Zein da v funtzioak bete behar duen ekuazio diferentziala?

3.- Defini dezagun $G_0(x,\xi;k)$ funtzioa ondorengo problemaren soluzio bezala:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right) G_0(x,\xi;k) = -\delta(x-\xi)\,;$$
$$G_0(0,\xi;k) = G_0(b,\xi;k) = 0\,.$$

Froga ezazu sistema osoaren maiztasun normalek ondoko ekuazioa betetzen dutela:

$$\frac{m}{\tau} G_0(a,a;\omega\sqrt{\rho_0/\tau})\omega^2 = 1\,.$$

4.- Froga ezazu n-garren maiztasun normala ondokoa dela, m masa sokaren masa baino askoz txikiagoa bada (hots, $m << \rho_0 b$):

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\tau}{\rho_0}}\frac{n\pi}{b}\left(1 - \frac{m}{\rho_0 b}\sin^2\left(\frac{n\pi a}{b}\right) + O\left(\left(\frac{m}{\rho_0 b}\right)^2\right)\right)\,.$$

9. Lor ezazu

$$f(x) = \int_0^\infty dt\,\frac{e^{-xt}}{1+t^2}$$

funtzioaren garapen asintotikoa $x=\infty$ puntuaren inguruan.

10. Demagun

$$f(x) = xe^{x^2}\mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}xe^{x^2}\int_x^\infty dt\,e^{-t^2}$$

funtzioa. Gara ezazu asintotikoki $x=\infty$ puntuaren inguruan, zatikako integrazioaren bidez (*Iradokizuna:* $\tau = t^2$ integrazio aldagai aldaketa egin ondoren). Froga ezazu garapena dibergentea dela, x guztientzat.

11. Kalkula ezazu ondoko integralaren garapen asintotikoa, $\lambda \to \infty$ doanean:

$$\int_0^\infty dt\,e^{\lambda(t(1+i)-t^3)}\,.$$

12. Kalkula ezazu ondoko integralaren garapen asintotikoa, $\lambda \to \infty$ doanean:

$$\int_0^\infty dt\,e^{-\lambda t}\frac{\sqrt{t}e^t}{1+t}\,.$$

13. Kalkula ezazu ondoko integralaren garapen asintotikoa, $\omega \to \infty$ doanean:

$$\int_3^5 dt\, \frac{\cos \omega t}{1+t^2}\,.$$

14.* Froga ezazu ondokoa, $\lambda \to \infty$ doanean:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{e^{i\lambda x}}{(1+x^2)^\lambda} \sim \frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})\pi}}{\lambda^{1/2}} e^{(1-\sqrt{2})\lambda} \left(2\sqrt{2}-2\right)^{-\lambda}\,.$$

15.* (Oso luzea, hasieratik notazio egokia hartzen ez bada) Erabili Lindstedt-Poincaré-ren metodoa ondoko sistema ebazteko, eta alderatu soluzio zehatzarekin:

$$\begin{aligned}
\dot{x} =& -4y + 2z + \epsilon z\,,\\
\dot{y} =& 4x - 4z\,,\\
\dot{z} =& -2x + 4y - \epsilon x\,.
\end{aligned}$$

Kalkuluetan murgildu baino lehenago, ziurtatu metodoa aplikagarria dela.

Gehigarria:

Azken urteetako azterketen ariketa batzuk

16. (2006, Otsaila) Kalkula ezazu $Ly = -y'' - \epsilon x^2 y$, $y(0) = y(1) = 0$ eragilearen balio eta funtzio propioen hurbilketa, hau da, $Ly = \lambda y$ problemaren soluzio hurbilduak. x aldagaia adimentsionala da, eta ϵ oso txikia ($|\epsilon| \ll 1$). $(0,1)$ tartean definitutako funtzioak funtzio propioen gainezarmen bat bezala idatz daiteke? Zergatik? Posible bada, nola kalkulatuko zenituzke koefizienteak?

17. (2005, Otsaila) Lor ezazu ondoko problemaren soluzio hurbildua. Azaldu bere aplikagarritasun eremua.

$$y'' = (1+x)^2 y\,, \qquad y(0) = 1\,, \quad y'(\infty) = 0\,.$$

18. (2005, Iraila) Kalkula itzazu ondoko funtzioaren garapen asintotikoaren lehen gaiak, $t \to \infty$ doanean:

$$f(t) = \int_1^\infty \mathrm{d}y \frac{y^{-t-1}}{1+(\ln y)^2}\,.$$

19. (2004, Otsaila) Lor ezazu ondoko ekuazioaren soluzio orokor hurbildua, x aldagaia ren tarte positibo luzean egokia dena (Iradokizuna: hasteko, lor ezazu $v'' + \phi(x)v = 0$ forma duen ekuazio baliokidea, $y(x) = \mu(x)v(x)$ aldagai aldaketa baten bidez.):

$$y'' - \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{5}{4x^2} + \frac{1}{x^4})y = 0\,.$$

20. (2004, Iraila) Lor ezazu ondoko ekuazioaren soluzio orokor hurbildua, x ardatzerdi positibo osoan egokia dena:

$$y'' - 2y' + \left(2 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) y = 0\,.$$

21. (2003, Iraila) Lor ezazu ondoko ekuazioaren soluzio hurbildua eta bikoitia, x puntu guztietan egokia:

$$y'' + (1 + \epsilon x^2)^2 y = 0\,.$$

22. (2002, Otsaila) Kalkula ezazu ondoko integralaren garapen asintotikoa, $x \to \infty$ doanean. Lortutako seriea, konbergentea al da? Justifika ezazu zure erantzuna.

$$\int_0^\infty dx\, e^{-xt} \log(1+x)\,.$$

23. (2002, Otsaila) Demagun $y'' - g^2(x)y = 0$ ekuazioa, $g(x)$ funtzioa "geldoa" izanik. g funtzioa konstante izango balitz, soluzioak esponentzialak izango lirateke.

Biz $\epsilon \ll 1$ zenbaki erreal eta positiboa. Lor ezazu ondoko problemaren soluzioa hurbildua, edozein x puntutan onargarria dena:

$$\begin{aligned} &\epsilon^2 y'' = (1+x^2)^2 y\,,\\ &y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1\,. \end{aligned}$$

24. (2007, Iraila) Kalkula itzazu gutxienez ondoko integralaren seriezko garapenaren lehenengo hiru gaiak, λ handiaren berretura seriean, hain zuzen ere. (Iradokizuna: aldagai aldaketa egitea komenigarria izan daiteke)

$$\int_1^\infty \mathrm{d}\tau\, \frac{\tau^{-\lambda-1}}{1+\tau}\,.$$

25. (2008, Otsaila) Unibertsoaren espantsioan dela eta, uhinen propagazio ekuazioa

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} = a^2(t) \nabla^2 u\,,$$

dugu, non ∇^2 Laplacearra den, c argiaren abiadura, eta $a(t)$ denboraren funtzioari "eskala faktorea" deritzogun.

Demagun plano batetik neurtutako distantziak eraginik ez duela uhinen hedatzean, planoa (adibidez) galaxia espiral batena izanda. Demagun gainera uhinak nuluak direla galaxiaren ertzean. Erabil itzazu aldagaien banantzea eta WKBJ metodoa denbora zatian egoera honen deskribapen matematikoa lortzeko. Zeintzuk dira baldintzak hurbilketa ona izateko? Modu guztien artean, ondoko datuekin, zeinetan lortzen dugu hurbilketarik egokiena? Galaxiaren erradioa 10^5 argi-urtetakoa da , Hubbleren konstantea ($H = \dot{a}/a$) $(1.3 \times 10^{10}$ urte$)^{-1}$ baliokoa da, eta eskala faktorea $Ct^{2/3}$ formakoa dugu.

26. (2008, Iraila) Kalkula itzazu (gutxienez) ondoko integralaren seriezko garapenaren lehenengo bi gaiak, s handiaren berretura seriean, hain zuzen ere.

$$\int_{-\pi/4}^{5\pi/8} \mathrm{d}t\, e^{-s\cos^2 t} \sinh t\,.$$