1. Froga ezazu Heaviside funtzioa ondoko integral konplexuaren bidez adierazi daitekeela, $t \neq 0$ kasuan,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \mathrm{d}\sigma \, \frac{e^{\sigma t}}{\sigma} \,,$$

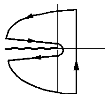
s erreala eta positiboa izanik. Zein izango litzateke arestian ikusitako integralaren balioa $t = 0$ kasuan?

2. Aurki itzazu ondoko funtzioen alderantzizko Laplace-ren transformatuak

$$\text{a)} \, \frac{1}{s^2 + a^2} \,; \quad \text{b)} \, \frac{s}{s^2 + a^2} \,; \quad \text{c)} \, \frac{1}{s^3} \,; \quad \text{d)} \, \frac{e^{-as}}{s} \quad (a \geq 0) \,;$$

3. Kalkula itzazu ondoko funtzioen Fourier-en transformatuak:

$$\text{a)} \, \frac{1}{x^2 + a^2} \,; \quad \text{b)} \, e^{-\alpha |x|} \,.$$

4.[*] Erabil ezazu  ibilbidea ondorengo funtzioaren alderantzizko Laplace-ren transformatua kalkulatzeko:

$$\frac{1}{\sqrt{s}} \,.$$

5.[*] Aska ezazu ondorengo ekuazio integrala:

$$f(x) = x + \int_0^x \mathrm{d}y \, f(y) \,.$$

(*Iradokizuna:* Erabil ezazu Laplace-ren transformazioa. Horretarako, sar ezazu Heaviside-ren funtzio egokia integralean. Ikusten den moduan, oso erabilgarriak dira transformazio integralak ekuazio integral linealak askatzeko)

6.[*] Beti bezala, osziladore indargetua modu berrian aztertuko dugu.

$$\ddot{f} + 2\gamma \dot{f} + \omega_0^2 f = g$$

ekuazio-familiaren soluzio partikularra

$$f_p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds \, G(t-s) g(s)$$

adierazpenaren bidez lortu nahi dugu. Zein da G funtzioaren Fourier-en transformatuak bete behar duen ekuazio algebraikoa? Hau da,

$$\hat{G}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, e^{i\omega t} G(t)$$

funtzioak bete behar duen baldintza. Non daude $\hat{G}$ funtzioaren singularitateak? Sailkatu singularitate horiek, hiru kasu ezberdinetan, hots, a) indargetze azpikritikoan; b) indargetze kritikoan; c) gainindargetzean. Saiatu erresonantzia fenomenoa irudi honetan ulertzen. $G(t)$ funtzio bakar bat daukagu, ala funtzio multzoa? Nola aldatuko litzateke $G(t)$ funtzioa mugalde baldintza orokortuak aldatuko balira?

7. Funtzio bikote baten korrelazioa (korrelazio gurutzatua) ondoko adierazpenaren bidez kalkulatzen dugu:

$$C(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau\, f^*(\tau)g(t+\tau)\,.$$

Bikotearen osagaiak berdinak direnean, autokorrelazioaz berba egiten dugu. Froga ezazu korrelazioaren Fourieren transformatua bikotearen Fourieren transformatuen biderkadura dela (konstante baten arabera). Kalkula ezazu $\theta(t)\exp(-\gamma t)\sin(\Omega t)$ funtzioaren autokorrelazioa. Azter ezazu esangura fisikoa.

8. Egoera solidoko sistema anisotropiko batzuetan, tenperatura baxuak direla eta, "karga-dentsitate uhineko" egoera agertzen da. Egoera horretan, kargaren dentsitateak modulazioa aurkezten du, azpiko kristalaren egitura aldatua izan delako. Ariketa honetan eredu sinplifikatu bat aztertuko dugu. Demagun bi dimentsiotan (x eta z, hain zuzen ere) sistema infinitoa, y norabidean $(-h, h)$ tartean mugatua. Demagun solidoaren barnean karga dentsitatea $A\cos(qx)$ dela (ez dago y-rekiko menpekotasunik, eta z aldagaiari dagokionez, barruan funtzioa konstante da, eta kanpoan, nulua - nahi izanez gero, $\theta(h-|z|)$ Heavisideren funtzioa agertzen da). z aldagaiarekiko Fourier-en transformatua erabiliz, kalkula ezazu potentzial elektrostatikoa. Egiazta ezazu baldintza fisikoak betetzen direla (solidotik kanpo ez dago kargarik, simetria, etab.).

9. Idatz ezazu ondoko problemari dagokion hedatzailea d-dimentsiotako integral baten bidez:

$$u_t = \mathbf{a}\cdot\nabla u + c^2\nabla^2 u\,, \qquad u(\mathbf{r},0) = f(\mathbf{r})\,.$$

[Azalpena: idatz ezazu problemaren soluzioa $u(\mathbf{r},t) = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{d}\mathbf{x}\, G(\mathbf{r}-\mathbf{x},t)f(\mathbf{x})$ forma pean, eta erabil itzazu Laplace-ren eta Fourier-en transformatuak] Kalkula ezazu hedatzailearen forma esplizitua $d=1$ kasuan.

Honezaz gain, kalkula ezazu

$$u_t = \mathbf{a}\cdot\nabla u + c^2\nabla^2 u + f(\mathbf{r})\,, \qquad u(\mathbf{r},0) = 0$$

problema askatzeko egokia den Green-en funtzioa. (Iradokizuna: kalkula ezazu lehenengoz $\mathbf{a}=0$ kasuan, eta gero erabili hori $\mathbf{x}+\mathbf{a}t$ puntuetan).