1. Azter ezazu ondorengo ekuazioek (eta zehaztu gabe utziko ditugun mugalde-baldintzek) osotzen dituzten problemak aldagai-banantzearen bidez askatzeko ahalbidea:

$$\begin{array}{ll} a) & xu_{xx} + u_t = 0 \\ b) & tu_{xx} + xu_t = 0 \\ c) & u_{xx} + u_{xt} + u_t = 0 \\ d) & [p(x)u_x]_x - r(x)u_{tt} = 0 \\ e) & u_{xx} + (x+y)u_{yy} = 0 \end{array}$$

2. R erradioko esfera batean bero-eroalpen ekuazioa betetzen da, hots, $T(r,t)$ tenperatura funtzioak ondoko ekuazioa betetzen du:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r} \right),$$

non c konstantea den. Kalkula ezazu $T(r,t)$ tenperatura esfera puntu guztietan eta $t > 0$ une guztietan, ondorengo baldintzen pean:

a) esferaren gainazalaren tenperatura une guztietan nulua da;
b) esferaren puntu guztietan tenperatura finitua da, $r = 0$ puntua barne;
c) hasierako tenperaturaren balioa ondokoa da:

$$T(r,0) = \frac{T_0 R}{r} \sin\left(\frac{\pi r}{R}\right).$$

Iradokizuna: Egiazta ezazu $S(r,t) = rT(r,t)$ funtzioak $S_t = c^2 S_{rr}$ ekuazioa betetzen duela. Zein da S funtzioaren balioa $r = 0$ puntuan?

3. Beste orrian agertutako Bessel-en funtzioei buruzko emaitzak erabiliz, egiazta ezazu ondorengoa:

$$\frac{d}{dx}\left[x^2\left(J_m^2(x) - J_{m+1}(x)J_{m-1}(x)\right)\right] = 2xJ_m^2(x).$$

Hortaz, lor ezazu $\int_0^1 dx\, xJ_m(k_i x)J_m(k_j x)$ biderkadura eskalarrarako adierazpen bat, non $k_i = \sqrt{\lambda_i^{(m)}}$ eta $k_j = \sqrt{\lambda_j^{(m)}}$ zenbakiak $J_m(x)$ funtzioaren zeroak diren.

Zer dira $\lambda_j^{(m)}$ zenbakiak? (*Iradokizuna:* Gogoan izan Sturm-en eta Liouville-ren eragileak...) Zein da x integrakizunean agertzeko arrazoia?

4. Mintz elastiko mehe baten zeharkako bibrazioak $u_{tt} = a^2\nabla^2 u$ uhin ekuazioak emandakoak dira, non $u(t,r,\theta)$ funtzioak zeharkako deformazioa neurtzen duen. Demagun ertz finkoa duen mintz zirkularra, erradioa bat izanik. Demagun halaber $t = 0$ unean mintzaren deformazioak ez duela θ angelu polarrarekiko menpekotasunik, eta abiadurarik gabe uzten zaiola mugitzen hasten:

$$u(t,1,\theta) = 0, \quad t > 0 \qquad\qquad u(0,r,\theta) = f(r), \quad u_t(0,r,\theta) = 0 \qquad 0 \le r \le 1,$$

$f(r)$ mintzaren hasierako konfigurazioa izanik (f funtzioak $f(1) = 0$ baldintza betetzen du). Gainera, u funtzioa mugatua izan behar da beti. Froga ezazu u funtzioak ondorengo adierazpena onartzen duela:

$$u(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\sqrt{\lambda_n} r)\cos(a\sqrt{\lambda_n} t).$$

Aurki itzazu c_n koefizienteei dagozkien adierazpenak. Kalkula itzazu azken hauek $f(r) = (1 - r^2)^2$ kasurako.

5. Lor itzazu unitate erradioko mintz zirkular baten deformazioa, $u(t, r, \theta)$, hasierako baldintzak $u(0, r, \theta) = J_1(\sqrt{\lambda_1^{(1)}}r) \cos\theta$, $u_t(0, r, \theta) = 0$ izanik. Marraz itzazu (gutxi gora-behera) hasierako baldintzak.

6. Aurki ezazu $u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x) \cos\omega t$ ekuazioaren soluzioa $0 < x < \pi$ tartean, $t > 0$ uneetan, $u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0$, $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ mugalde eta hasierako baldintza homogenoen menpean, hurrengo kasuetarako:
a) ω eta modu normalen bibrazio maiztasun naturalak, $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$, ezberdinak dira.
b) ω eta ω_m modu normal baten maiztasun naturala berdintsuak dira.
c) ω eta ω_m berdinak dira. (Nola deritzogu fenomeno honi?)

7. Aurreko ariketaren ildotik, azter ezazu $u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t)$ ekuazioaren soluzioa $0 < x < \pi$ tartean, $t > 0$ uneetan, $u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0$, $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ mugalde eta hasierako baldintza homogenoen menpean. Idatz ezazu soluzioa serie baten bidez.

8.* *Paradoxa*: Aurreko ariketan $g(\chi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sin\left((2k+1)\chi/2\right)/(2k+1)$ motako serie batzuk agertzen dira. Defini dezagun $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+1/2}/(2k+1)$; deribatu, batu, eta, $f(0) = 0$ baldintza erabiliz, idatz ezazu $f(z)$ funtzioaren adierazpen trinkoa $|z| < 1$ eremuan. Erabil ezazu emaitza $g(\chi)$ kalkulatzeko (iradokizuna: $\sin(\zeta) = \Im[\exp(i\zeta)]$): konstante da! Beraz, badirudi aurreko ariketako serie osoa nulua dela. Zer gertatzen da hemen?

9.* Aurki ezazu $T(r, \theta, \phi, t)$ tenperatura funtzioa esfera isolatu batean (gainazalean deribatu normala nulua izan behar da), hastapen baldintza $T(r, \theta, \phi, t = 0) = f(r, \theta, \phi)$ izanik.

(*Iradokizuna:* momentu jakin batean komenigarria izango da $R(r) = r^{-1/2}S(r)$ aldagai aldaketa egitea eta ordena erdiosoko Bessel-en funtzioen propietateak kontuan hartzea)

10. Lor ezazu $u_{xx} = u_{tt} + \sin x$ ekuazioa betetzen duen $u(x, t)$ funtzioa, mugalde baldintzak ondokoak izanik: $u(0, t) = 7(1 - t)$, $u_x(\pi, t) = 0$, $u(x, 0) = 7$, $u_t(x, 0) = 0$.

11. Aurki ezazu Laplace-ren ekuazioaren soluzioa $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$ laukizuzenean, ondorengo muga-baldintzen menpean:

$$
\begin{aligned}
u(0, y) &= 0\,, \qquad u(a, y) = f(y)\,, \qquad 0 \le y \le b\,, \\
u(x, 0) &= 0\,, \qquad u(x, b) = g(x)\,, \qquad 0 \le x \le a\,.
\end{aligned}
$$

12. Hagaska baten muturren tenperatura finkoa da, hau da, $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$. Demagun $t < 0$ uneetan hagaskaren tenperatura leku guztietan nulua dela, eta $t = 0$ unean hasierako perturbazioa sartu dugula, hasierako ($t = 0$ uneari dagokion egoerako) tenperatura-distribuzioa $u(x, 0) = u_0\delta(x - x')$ izanik. x' puntua hagaskan dago. Kalkula ezazu tenperaturaren distribuzioa $t > 0$ uneetan. Nola erabiliko zenuke lorturiko emaitza hasierako tenperatura-distribuzio orokorraren eboluzioa kalkulatzeko, mugalde baldintzak mantenduz?

13. Laplacearra koordenatu esferikoetan (r, θ, ϕ) honela idazten da:

$$
\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r) + \frac{1}{r^2 \mathrm{sen}\theta}\partial_\theta(\mathrm{sen}\theta\,\partial_\theta) + \frac{1}{r^2\mathrm{sen}^2\theta}\partial_{\phi\phi}
$$

Egia ala gezurra: $\nabla^2(1/r) = 0$. (Kontsidera ezazu egoera fisiko egokia!)

14. Bi dimentsiotako laplacearra koordenatu polarretan (r, φ) honela idazten da:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 \,.$$

Egia ala gezurra: $\nabla^2 \ln r = 0$.

15. Demagun R erradioa duen planeta esferiko baten gainazaleko tenperatura latitudearen menpekoa hutsa dela, eta barruko tenperatura-distribuzioak ere ϕ angeluarekiko menpekotasunik ez daukala. Kalkula ezazu $u(r, \theta)$ tenperatura, gainazalean $u(R, \theta) = \sin^2\theta$ mugalde-baldintza betetzen duen egoera egonkorrean.

16.* (**Irudien metodoa**) Bero-eroalpen problema ebatziko dugu ariketa honetan, baina lerroerdian, hau da, $x \geq 0$ tartean:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,; \qquad x \geq 0\,; \quad t \geq 0\,;$$
$$u(x,0) = f(x)\,; \quad u(0,t) = 0\,, \qquad \text{eta } u \text{ bornatua}\,.$$

Hemen ezin dugu zuzenean Fourier-en transformatua erabili, eta beste tranpatxo bat egingo dugu: saiatu soluzioa

$$u(x,t) = \int_0^\infty ds\ [G(s-x,t) - G(s+x,t)]\, f(s)$$

forman idazten.

Beste aukera bat da beste problema bat askatzea,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,; \qquad x \in \mathbf{R}\,; \quad t \geq 0\,;$$
$$u(x,0) = \begin{cases} f(x)\,, & x > 0; \\ -f(-x)\,, & x < 0; \end{cases} \qquad \text{eta } u \text{ bornatua}\,,$$

hain zuzen ere. Funtsean, benetan ezberdina al da azken prozedura hau?

17.* Demagun ondoko problema sorta:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - \frac{c^2}{l}u_x + \frac{c^2\mu}{l^2}u\,;$$
$$u(L,t) = e^{\gamma L/l}u(0,t)\,, \qquad u_x(L,t) = e^{\gamma L/l}u_x(0,t)\,;$$
$$u(x,0) = f(x)\,, \qquad u_t(x,0) = g(x)\,.$$

L tartearen luzera dugu, eta l, beste aldetik, difusio prozesu baten luzera karakteristikoa. μ eta γ parametro adimentsionalak dira. γ parametroaren balioa $1/2$ denean erraza da aldagaien banantzea egitea, bestela ez. Zergatik? Kalkula ezazu soluzioa $\gamma = 1/2$ kasuan. Saiatu interpretazio fisikoa ematen.

18.* Qubit (spin) bat kanpo indar baten menpean aldatuz doa. Kanpo eremua zarata zuria bada, qubit-a θ eta ϕ Bloch-en angeluek zehaztutako egoera puruan t unean aurkitzeko $P(\theta, \phi, t)$ probabilitate dentsitateak ondoko Fokker-Planck-en ekuazioa betetzen du:

$$\partial_t P(\theta,\phi,t) = \left[\eta^2\partial_\theta^2 + \frac{\eta^2}{4\tan^2\theta}\partial_\phi^2 + \frac{\omega}{2}\partial_\phi\right] P(\theta,\phi,t)\,.$$

η parametroa kanpo eremuaren eta qubit-aren arteko elkarrekintzaren intentsitatearen adierazle dugu; ω maiztasuna qubit askearena da (hau da, eremurik ez badago, Hamiltondarra $\hbar\omega\sigma_z/2$ da). Bloch-en esferaren angeluek egoera puruen parametrizazioa sortzen dute, modu honetan: $|\psi\rangle = \cos\theta|+\rangle + e^{i\phi}\sin\theta|-\rangle$. Definizio eremuak $[0, 2\pi]$ ϕ-rentzat, eta $[0, \pi]$, θ-rentzat. Deskribatu $P(\theta, \phi, t)$ probabilitate dentsitatearen eboluzioa, hastapen datu orokor batetik, eta hasierako dentsitatea $P(\theta, \phi, 0) = \delta(\theta - \theta_0)\delta(\phi - \phi_0)$ denean ere. Zein da P dentsitatearen portaera denbora infinitura doanean? (Beste modu batean esanda: P-rentzat egoera egonkorraren antzeko zerbait existitzen al da?) [ref: M. Schulz and S. Trimper, *Persistence of Quantum Information*, `quant-ph/0609221`]

Gehigarria:

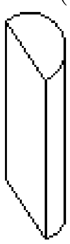
Azken urteetako azterketen ariketa batzuk

---

19. (2004 - Otsaila) Biz a erradio eta h altuera dituen zilindro homogeno eta bero eroalea. Zilindroaren gainazal osoa, oinarria izan ezik, T_0 tenperaturan mantentzen dugu. Oinarriak, beste aldetik, $T_0 + 100$ K-etako tenperatura aurkezten du une guztietan. Kalkula ezazu zilindroko tenperaturaren distribuzio egonkorra.

20. (2004 - Otsaila) Zein da zirkuluerdiaren forma duen danbolin baten maiztasun normal minimoa? (Iradokizuna: zeintzuk dira danbolin zirkular baten modo normalak?)

21. (2004 - Iraila) Zein da irudian agertzen den barrunbeko soinu uhinen maiztasun minimoa?



22. (2002 - Iraila) Aska ezazu ondoko hastapen- eta mugalde- baldintzapeko problema (Iradokizuna: kontuan izan ortogonaltasuna!)

$$\begin{aligned} \phi_t = \phi_{xx} + 2\phi_x\,, &\qquad 0 \le x \le \pi\,, \quad t \ge 0\,; \\ \phi(0,t) = 2t\,, &\quad \phi(\pi,t) = 2t + 2\,; \\ \phi(x,0) = 2x/\pi\,. & \end{aligned}$$

23. (2003 - Iraila) R erradioko zilindro infinitu batean bero iturri homogeno eta konstante sartu dugu. Beraz, barneko tenperaturak ondorengo ekuazioa beteko du:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \nabla^2 T + b^2\,,$$

non a eta b zenbaki errealak diren. Hasierako tenperatura nulua da zilindro osoan. Beste aldetik, zilindroa beroa igortzen ari da, une guztietan

$$T + R\frac{\partial T}{\partial r} = 0\,, \qquad r = R \quad \text{azalean}\,,$$

berdintzaren arabera. Kalkula ezazu tenperatura distribuzioa zilindroan, $t > 0$ une guztietan.

24. (2005 - Otsaila) Ebatzi ondoko problema:

$$
\begin{gathered}
u_t = c^2 u_{xx}\,, \qquad x \in [0, L]\,, \quad t > 0\,, \\
u(0,t) = 1\,, \quad u(L,t) = 2e^{-\mu t}\,, \quad u(x,0) = 3x + 1\,.
\end{gathered}
$$

25. (2005 - Iraila) Ebatzi ondoko muga baldintzapeko problema:

$$
\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0\,,
$$

ϕ funtzioa x eta y aldagaien menpekoa, $x \geq a$ tartean definituta. $x = a$ lerroan $\partial\phi/\partial x = 0$ daukagu, eta x aldagaia infinitorantz doanean

$$
\frac{\partial \phi}{\partial x} \to A\cos y\,, \qquad \frac{1}{x}\frac{\partial \phi}{\partial y} \to -A\sin y
$$

limiteak lortzen dira.

26. (2006 - Otsaila) Gimnasta batek 5 m-tako erradioko ohe elastiko baten gainean salto egin du.Tela berriro oreka posiziotik pasatzen den unean, goranzko abiadura du, $(5\text{ m} - r) \times 10/\text{s}$ formulak emanda, non r zentrutik neurtutako distantzia den. Kalkula ezazu telaren forma ondoko une guztietan.

27. (2006 - Otsaila) Kontsidera dezagun $\pi/6$-ko angeluko zirkulu-sektorea. Danbolin bezala erabiliko bagenu, zein izango litzateke bere maiztasun natural txikiena? Demagun orain sektorea bero-eroalea dela, eta bere erradioa a dela. Ondoko mugalde baldintzen pean, zein da tenperatura-distribuzio iraunkorra? (Tenperatura u funtzioak adierazten du, r erradio eta ϕ angeluaren funtzioa dena.)

$$
u(r,0) = 0\,, \quad u\left(r, \frac{\pi}{6}\right) = 0\,, \quad 0 \leq r \leq a\,; \qquad u(a,\phi) = \phi\,, \quad 0 \leq \phi < \frac{\pi}{6}\,.
$$

Sailkatu ebatzi duzun ekuazioa.

28. (2006 - Iraila) 2 m-tako luzerako hari mehea isolatuta dago (beroaren jarioa luzerazkoa da). Hasieran bere tenperatura

$$
\left[(4/\pi^2)\sin(\pi x/2\text{ m}) + 500\right]\text{K}
$$

dugu. Muturrak termostatoekin kontaktuan daude, ezker aldekoa 500 K-etakoarekin eta eskuin aldekoa 100 K-etakoarekin. Honezaz gain, berogailu batek bero fluxu konstantea sortzen dio hariri, $q(x) = Q\sin(\pi x/2\text{ m})$ fluxua hain zuzen ere. Kalkula ezazu $u(x,t)$ tenperatura eremua harian zehar. Zer gertatuko da $t \longrightarrow \infty$ doanean?

29. (2006 - Iraila) (Blade Runner:) Hannibal Chew Tyrell Corporation-aren begi diseinatzaileak begi multzo bat ia murgilduta du giza-gorputzen tenperatura duen fluido batean. Izatez, hiru laurdenak dago hor murgilduta. Azken laurdena airearekin kontaktuan dago, airearen tenperatura 20 oC-takoa izanda. Kalkula ezazu begi baten barruko tenperatura distribuzioa. Zure erantzuna serie bat bada, zehaztu lehenengo bi gaien zenbakizko koefizienteak.

30. (2007 - Otsaila) Zilindro beroale infinitoaren tenperatura konstantea eta uniformea dugu eta, bat-batean, beste tenperatura bateko bero iturri batean murgiltzen dugu. Kalkula ezazu tenperaturaren eboluzioa zilindroaren puntuetan. Nola aldatuko litzateke zure emaitza zilindroaren altuera finitoa izango balitz? Eman ezazu tenperatura puntu eta une guztietan bigarren kasu honetan ere.

31. (2007 - Otsaila) Solido beroale homogeneoak bi esfera zentrokideen arteko espazioa betetzen du. Barruko gainazalaren tenperatura konstantea eta uniformea da. Kanpokoarena, beste aldetik, $1-\cos\theta$ funtzioaren proportzionala da. Kalkula ezazu solidoaren tenperatura distribuzio egonkorra.

32. (2007 - Iraila) Zilindro beroale infinitoaren tenperatura konstantea eta uniformea dugu eta, bat-batean, beste tenperatura bateko bero iturri batean murgiltzen dugu. Kalkula ezazu tenperaturaren eboluzioa zilindroaren puntuetan. Nola aldatuko litzateke zure emaitza zilindroaren altuera finitoa izango balitz? Eman ezazu tenperatura puntu eta une guztietan bigarren kasu honetan ere.

33. (2007 - Iraila) Solido beroale homogeneoak bi esfera zentrokideen arteko espazioa betetzen du. Barruko gainazalaren tenperatura konstantea eta uniformea da. Kanpokoarena, beste aldetik, $1-\cos\theta$ funtzioaren proportzionala da. Kalkula ezazu solidoaren tenperatura distribuzio egonkorra.

34. (2008 - Otsaila) Kargarik gabeko zilindro eroale infinitoa bat-batean murgiltzen da eremu elektriko konstante batea, bere ardatzarekiko elkarzut. Zein da potentzial elektrostatiko zilindroa sartu ondoren?

35. (2008 - Otsaila) Unibertsoaren espantsioan dela eta, uhinen propagazio ekuazioa

$$\frac{1}{c^2}u_{tt} = a^2(t)\nabla^2 u\,,$$

dugu, non ∇^2 Laplacearra den, c argiaren abiadura, eta $a(t)$ denboraren funtzioari "eskala faktorea" deritzogun.

Demagun plano batetik neurtutako distantziak eraginik ez duela uhinen hedatzean, planoa (adibidez) galaxia espiral batena izanda. Demagun gainera uhinak nuluak direla galaxiaren ertzean. Erabil itzazu aldagaien banantzea eta WKBJ metodoa denbora zatian egoera honen deskribapen matematikoa lortzeko. Zeintzuk dira baldintzak hurbilketa ona izateko? Modu guztien artean, ondoko datuekin, zeinetan lortzen dugu hurbilketarik egokiena? Galaxiaren erradioa 10^5 argi-urtetakoa da , Hubbleren konstantea ($H = \dot{a}/a$) $(1.3\times 10^{10}$ urte$)^{-1}$ baliokoa da, eta eskala faktorea $Ct^{2/3}$ formakoa dugu.

36. (2008 - Iraila) Metalezko bi esfera zentrokide mozten ditugu xafla ezeroale berberarekin. Kanpokoaren erradioa barrukoaren erradioaren bikoitza dugu. Barruko goiko hemisferioa eta beheko kanpokoa $-V$ potentzialean mantentzen ditugu; beste biak (hots, kanpoko goikoa eta barruko behekoa) V potenzialean, ordea. Kalkula ezazu bi esferen arteko espazioaren potentzial elektrostatikoa.

37. (2008 - Iraila) Ebatzi ezazu

$$u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho - u_{tt} = 0$$

ekuazioa ondoko baldintzapean: 1) soluzioa erregularra da $\rho = 0$ ardatzean; 2) soluzioa asintotikoa, $\rho \to \infty$ limitean, $\sqrt{5/\pi\rho}(\cos 5\rho + \sin 5\rho)\cos 5t$ dugu.