1. Ondoko problema inhomogenoak Green-en funtziorik al dauka?

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dx}\right] = 2(x+1)\ , \qquad\qquad y(1) = y(2) = 0 \ \ ?$$

Baiezko erantzuna emanez gero, kalkula ezazu Green-en funtzioa. Bestela, argitu ez existitzeko arrazoia.

2. Ondoko mugalde problema bietariko bat Green-en metodoaren bidez aska daiteke, eta bestea ez.

$$\begin{aligned}
&i) \qquad \left(\frac{y'}{x+1}\right)' = \cos x \qquad\qquad && y(0) = 0, \qquad y(\sqrt{2}) + y'(\sqrt{2}) \ = \ 0 \\
&ii) \qquad \left(\frac{y'}{x+1}\right)' = \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}x \qquad\qquad && y(0) = 0, \qquad y(\sqrt{2}) - y'(\sqrt{2}) \ = \ 0
\end{aligned}$$

a) Zein da metodo hau erabiliz aska ezin daitekeena? Zergatik?
b) Kalkula ezazu beste problemaren Green-en funtzioa.

3.* Demagun ondoko Sturm-Liouville-ren eragilea:

$$L[y](x) = -x^2y''(x) - xy'(x)\,, \qquad D_L = \{y \in C^2(1, e^\pi)\,|\,y(1) = 0\,\&\,y'\,(e^\pi) = 0\}\,.$$

Kalkula itzazu eragilearen balio eta funtzio propioak (hau da, $L[y] = \lambda y$ ekuazioa bete dezatenak). Nolakoa izan behar da biderketa eskalarra funtzio propioak ortogonalak izateko? Aska ezazu ondoko mugalde problema inhomogenoa:

$$L[y](x) = \lambda y + \ln(x)\,, \qquad y(1) = 0 \quad \& \quad y'\,(e^\pi) = 0\,.$$

Kalkula ezazu $L_\lambda = L - \lambda$ eragilearen alderantzizkoa (hau da, G_λ Green-en funtzioa, $L_\lambda G_\lambda(x,z) = \delta(x-z)$ betetzen duena).

4. Demagun ondoko Sturm-Liouville-ren eragilea:

$$L[y](x) = -y'' - y' - \frac{1}{4}y\,, \qquad D_L = \{y \in C^2(0,1)\,|\,y(0) = 0\,\&\,y'(1) + \frac{1}{2}y(1) = 0\}\,.$$

Kalkula itzazu haztapena eta funtzio eta balio propioak. Aska ezazu ondoko mugalde baldintzapeko problema inhomogenoa:

$$y'' + y' + \frac{1}{4}y = e^{-x/2}\,, \qquad y(0) = 0\,, \quad y'(1) + \frac{1}{2}y(1) = 0\,.$$

Kalkula ezazu $L_\lambda = L - \lambda$ eragilearen alderantzizkoa (hau da, G_λ Green-en funtzioa, $L_\lambda G_\lambda(x,z) = \delta(x-z)$ betetzen duena).

5. Kalkula ezazu ondoko problemaren Green-en funtzioa $y''(x) = f(x)$, $y(0) = e^{\mu}y(\pi)$, $y'(0) = e^{-\mu}y'(\pi)$. Zer gertatzen da $\mu \to 0$ limitean? (Eranskina: eta mugalde baldintzak aldatu barik, zein izango litzateke $y''(x) + \lambda y(x) = \delta(x - z)$ ekuazioak definitutako problemaren soluzioa?)

6. Azter ezazu ondoko problemen familia:

$$x^2y'' + 2xy' + \left(\lambda + \frac{1}{4}\right)y = f(x)\,, \qquad y(1) = y(e) = 0\,.$$

Zein kasutan du problemak soluzio bakar bat? Zergatik? Kalkula itzazu lotutako eragilearen balio eta funtzio propioak.

Gara ezazu $1/\sqrt{x}$ funtzioa oinarri horretan.

Existitzekotan, adieraz ezazu $\lambda = 0$ balioari dagokion problemaren soluzioa f funtzioaren transformazio integral bat bezala (hau da, Green-en funtzioaren forma trinkoa erabiliz).

Erabil itzazu zure emaitzak ondoko problema askatzeko:

$$x^2y'' + 2xy' + \frac{1}{4}y = \frac{1}{\sqrt{x}}\,, \qquad y(1) = y(e) = 0\,.$$

7. (2006ko iraila) Kontsidera ezazu λ-rekin parametrizatutako problema inhomogenoen ondoko familia:

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{\lambda}{x^2}y = f(x)\,, \qquad y(1) = 0 = y'(2)\,.$$

Nolakoa izan behar da λ parametroa soluzioa $\int_1^2 \mathrm{d}\xi\, H(x,\xi)f(\xi)$ modura idaztea posible izateko? Kalkula ezazu H funtzioa $\lambda = -1/4$ kasuan, posible izanez gero.

8. (2007ko otsaila) Kalkula ezazu $G(t, t_0)$ Green-en funtzioa, ondoko ekuazioaren soluzioa dena,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}G + \alpha\frac{\partial}{\partial t}G = \delta(t - t_0)$$

$G(0, t_0) = \frac{\partial}{\partial t}G(0, t_0) = 0$ hastapen baldintzen pean ($t_0 > 0$). Hau erabiliz, ebatzi

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} = Ae^{-\beta t}\theta(t)\,, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0\,,$$

non θ Heaviside-ren jauzi funtzioa den.

9. Kalkula ezazu

$$y^{(\mathrm{IV})} = f(x)\,, \qquad y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0$$

problema familiaren soluzioa, integral baten bidez (hau da, $y(x) = \int_0^1 \mathrm{d}\xi\, G(x,\xi)f(\xi)$ forman).

10. (2008ko otsaila) Partikula bat higitzen da potentzial paraboliko baten eraginpean. Batbatean, une jakin batean (partikula potentzialaren minimotik pasatzen ari denean) kanpo indar aldakorra, sinusoidala, hasten da eragiten. Denbora tarte baten ondoren partikula lehenengo aldiz berriro minimori dagokion posiziotik pasatzen da. Denbora tarte hori datutzat hartuta, erabil ezazu Greenen funtzioen metodoa problema ebazteko. Eztabaidatu proposatutako soluzio(ar)en existentzia eta bakartasuna. Azaldu kasu bereziak. Zein zen partikularen abiadura kanpo indarra pizteko unean?