1. Demagun ondoko bigarren ordenako ekuazio diferentzial arrunt eta homogenoa daukagula,

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0\,. \qquad (i)$$

Bila dezagun $\mu(x)$ integrazio-faktorea, $\mu(x)$ hori (i) ekuazioarekin biderkatuz,

$$\left[\mu(x)P(x)y'\right]' + \mu(x)R(x)y = 0 \qquad (ii)$$

izan dadin. a) Froga ezazu μ funtzioak $P\mu' = (Q - P')\mu$ ekuazioaren soluzioa izan behar duela, eta

$$\mu(x) = C\frac{1}{P(x)}\exp\int \mathrm{d}x\,\frac{Q(x)}{P(x)}$$

dela, C konstante izanik.

b) Transforma itzazu ondorengo ekuazioak (ii) formara:

$$\begin{aligned} y'' - 2xy' + \lambda y &= 0 && \text{Hermite} - \text{en ek.} \\ x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y &= 0 && \text{Bessel} - \text{en ek.} \\ xy'' + (1 - x)y' + \lambda y &= 0 && \text{Laguerre} - \text{en ek.} \\ (1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y &= 0 && \text{Tchebyschev} - \text{en ek.} \end{aligned}$$

Zergatik da interesgarria transformazio hau?

2. Kalkula ezazu $L_2(0,\infty)_w$ espazioan $f(x) = 2$ eta $g(x) = 3x$ funtzioen biderkadura eskalarra, $w(x) = e^{-x^2}$ haztapenarekin. Bilatu $\alpha f + \beta g$ batura, f funtzioaren ortogonala eta unitate-normakoa dena. Egin gauza bera $L_2(-\infty,\infty)_w$ espazioan.

$$\text{Oharra :} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,.$$

3. Gram-Schmidt-en ortogonalizazio metodoak $\{v_1, v_2 ... v_n\}$ linealki independenteak diren bektoreen multzoa $\{e_1, e_2 ... e_n\}$ multzo ortogonal bihurtzen du, induktiboki:

$$\begin{aligned} e_1 &= v_1 \\ e_2 &= v_2 - \frac{< e_1, v_2 >}{< e_1, e_1 >}\, e_1 \\ &\vdots \\ e_n &= v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{< e_i, v_n >}{< e_i, e_i >}\, e_i \end{aligned}$$

a) Egiazta ezazu metodoa *grafikoki* $n = 3$ kasuan.

b) $f_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2...$ funtzioek $L_2[-1, 1]$ espazioaren oinarri ez-ortogonal bat osotzen dute. Bila itzazu Gram-Schmidt-en metodoaren bidez lehenengo lau bektore ortogonalak.

c) Legendre-en polinomioak, $\{P_0(x), P_1(x), \ ... \ \}$, oinarri ortogonal hartatik kalkula ditzakegu, $P_i(1) = 1$ normalizazio baldintza erabiliz. Kalkula itzazu $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ eta $P_3(x)$. (Zein problema fisikotan agertzen dira polinomio hauek?)

4. Bila itzazu **grafikoki** $y'' + \lambda y = 0$ ekuazioak eta $i)$ $y(0) = y'(1) = 0$, $ii)$ $y'(3) = y'(7) = 0$, $iii)$ $y(-\frac{\pi}{2}) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$ eta $iv)$ $y'(-5.2) = y(-3.4) = 0$ mugalde-baldintzek osotzen dituzten Sturm-Liouville-en problema erregular eta homegeneoen funtzio propioak.

5.* Froga ezazu

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) - 2y'(1) = 0$$

Sturm-Liouville-en sistemaren funtzio propioak $\{\sin\sqrt{\lambda}_n x\}$ direla. $\lambda = 0$ balioa izan ezik, balio propioek $\tan\sqrt{\lambda} = 2\sqrt{\lambda}$ ekuazioa betetzen dute. Ekuazio transzendental hori aztertuz, egiazta ezazu $n \to \infty$ doanean $\lambda_n \approx (2n-1)^2\pi^2/4$ dela. Gara ezazu $f(x) = x$ funtzio propioen oinarria erabiliz (garapen hau ez da harmonikoa, hau da, maiztasunak ez dira oinarrizko maiztasun baten multiploak; beraz, Fourier-ren garapen "arruntak" eta honako hau beren artean desberdinak dira).

6. Azter ezazu $y'' + 2y' + y + \lambda y = 0$ ekuazioa, $(0, \pi)$ tartean, $y(0) = y(\pi)$ eta $y'(0) = e^{2\pi}y'(\pi)$ baldintzen pean. Endekapenik al dago?

7. Egiazta ezazu

$$y'' + a\delta(x)y + \lambda y = 0$$

ekuazioak, $y(\pm\pi) = 0$ baldintzen pean, eta a erreala izanik, balio propio erreleak dituela, ondoko berdintzak definituta:

$$\tan(\pi\sqrt{\lambda}) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{a}\,.$$

[Honezaz gain beste balio propioen familia bat du, $\lambda_n^{(e)} = n^2$ direlakoak] Zer behar dugu balio propio negatiboak agertzeko? Schrödinger ekuazioarekin alderatuz, eman ezazu azalpen fisikoa.

8. Aztertu ondoko eragile diferentziala:

$$Ly = \frac{1}{4}(1+x^2)^2 y'' + \frac{1}{2}x(1+x^2)y' + ay\,,$$

$(-1, 1)$ tartean. a konstantea da. L-ren definizio eremua -1 eta 1 puntuetan nuluak diren funtzioek osatzen dute. Zein da haztapen egokia? $x = \tan(\theta/2)$ aldagai aldaketaren bitartez, kalkula itzazu eragilearen balio eta funtzio propioak.

9.* (**Bessel-en funtzioen propietateak**) $J_n(x)$ funtzioek, hau da, lehen motako Bessel-en funtzioek, ondoko ekuazio diferentzial arrunta betetzen dute:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0\,.$$

n osoa denean,

$$J_n(0) = \delta_{n0}\,,$$

non δ_{nm} Kronecker-en delta den, eta

$$J_n'(x) = \frac{1}{2}\left(J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right)\,.$$

Froga ezazu

$$g(x,t) = e^{x(t-1/t)/2}$$

funtzioa Bessel-en funtzio sortzailea dela, hots,

$$e^{x(t-1/t)/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$$

ekuazioa betetzen dela. (*Iradokizuna:* Froga ezazu ondokoa:
1) bi alboek deribatu partzialetako ekuazio berbera betetzen dute;
2) $g(0,t)$ eta $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(0)t^n$ bat datoz;
3) $\partial_x g(0,t)$ eta $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(0)t^n$ berdinak dira.)

Funtzio sortzailea deribatuz, lor itzazu ondorengo erlazioak:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)\,; \\ &\text{b)} \quad J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J_n'(x)\,. \end{aligned}$$

Hauek erabiliz, lor itzazu hurrengoak:

$$\begin{aligned} &\text{c)} \quad \frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n J_{n-1}(x)\,; \\ &\text{d)} \quad \frac{d}{dx}\left[x^{-n} J_n(x)\right] = -x^{-n} J_{n+1}(x)\,. \end{aligned}$$

Egiazta ezazu d) erlazioa c) erlazioaren ondoria dela, $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ propietatea erabiliz.

10. Sturm-Liouville-ren teorema erabili barik, froga ezazu zuzenean $J_\nu(\lambda_n^{(\nu)} x)$ eta $J_\nu(\lambda_m^{(\nu)} x)$ funtzioak x haztapenarekiko ortogonalak direla $(0,1)$ tartean, $m \neq n$ kasuan, eta $J_\nu(\lambda_n^{(\nu)}) = J_\nu(\lambda_m^{(\nu)}) = 0$ direlakoan. (Iradokizuna: erabil ezazu Bessel-en ekuazioa bera eta zatikako integrazioa funtzio bi horien arteko wronskiarra aztertzeko).

11.* (**Legendre-ren polinomioen propietateak**) Legendre-ren funtzio sortzailea erabiliz,

$$F(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n\,, \quad |t| < 1\,,$$

lor ezazu bi punturen arteko distanziaren ondorengo adierazpena:

$$\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\theta)\,, \quad \begin{cases} r_< = \min(r_1, r_2) & \text{eta} \\ r_> = \max(r_1, r_2) & , \end{cases}$$

eta $\cos\theta = \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2/(r_1 r_2)$ izanik.

Funtzio sortzailea deribatuz, lor itzazu ondoko erlazioak:

a) $(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$;
b) $P'_n(x) - 2xP'_{n-1}(x) + P'_{n-2}(x) = P_{n-1}(x)$;

eta hauetatik,

c) $P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x)$;
d) $xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x)$;
e) $P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$;
f) $(x^2-1)P'_n(x) = nxP_n(x) - nP_{n-1}(x)$.

Konproba ezazu $P_n(x)$ Legendre-ren polinomioek

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

ekuazioen soluzioak direla. Egiazta ezazu (berriro ere funtzio sortzailea erabiliz) $P_n(1) = 1$ dela. Defini dezagun $Ly = -(1-x^2)y'' + 2xy'$ eragile diferentziala. Zein motatakoa da? Zer dira Legendre-ren polinomioak honekiko? Zein biderketa eskalarrarekiko izango dira ortogonalak?

12.* **Zaila!** $u'' + \omega^2\,(1 + a\delta(x))\,u = 0$ ekuazioak eta $u(l) = u(-l)$ eta $u'(l) = u'(-l)$ mugalde baldintzek osatutako problemak tribiala ez den soluziorik izateko, zeintzuk dira ω-ren balioak? (Oharra: balio konplexuak ere aztertu).

13. Demagun lerro erreal osoan definitutako funtzio normalizagarrien espazioa, haztapena konstante izanda (ohartu euren ordezkari jarraitua zerorantz doa, gutxienez x^{-1} funtzioa bezain azkar, $|x| \to \infty$ limitean). Ondoko eragileak hermitiarrak al dira, espazio horretan definituta?

$$i) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x\,; \quad ii) \quad -i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x^2\,; \quad iii) \quad ix\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,; \quad iv) \quad i\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\,.$$