Ekuazio diferentzial arruntak Laplace-ren transformazioa
8. gaia

Egonkortasunaren teoria

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

8.1 Egonkortasunaren kontzeptua

- Orokorrean, ekuazio diferentzial arruntak ebaztea ez da lan erreza. Zorionen, batzutan nahiko da $t \to \pm\infty$ limiteko portaera edo jokabide asintotikoa arakatzea.
- Egun, arlo horri dinamika kualitatibo deritzo.
- Halako analisietarako funtsezko kontzeptua egonkortasuna dugu.

Eda 8. gaia

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

- 4. gaian ikusi genuenez, lehen ordenako ekuazio sistemei sistema dinamiko ohi deritze. Izan bedi sistema horietako bat
$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t, \vec{x}),$$
eta haren soluzio bat, $\vec{x}^*(t)$, hau da,
$$\dot{\vec{x}}^*(t) = \vec{f}(t, \vec{x}^*(t)).$$
- Sistema baten jokabidea kualitatiboa deskribatzeko oso erabilgarria da jakitea ea multzo aldaezinik daukan eta non dauden kokatuta.
  Multzo batean hasten diren soluzioak betiko (eta betidanik) badaude haren barnean, orduan multzo hori aldaezina dugu.
  Mota asko dago, arruntenak oreka-puntuak ditugu. Horei ere puntu egonkor,finko, kritiko edo pausaguneko puntu ere deritze, eta harien definizioa ondokoa da.
  - Jo dezagun $\vec{x} = \vec{x}^s tar$ puntu finkoa dela, orduan definizioz:
$$\vec{f}(t, \vec{x}^*) = 0, \quad (\text{eta } \frac{\partial \vec{f}(t, \vec{x}^*)}{\partial t} = 0 \text{ ere}).$$

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

8.1 ariketa

- Aurkitu hurrengo sistema dinamikoen oreka puntuak: (a) $\dot{x} = ax$, $\dot{x} = ax - x^3$.
- a) Kasu honetan argi dago $x^* = 0$ puntua baino ez dugula. Beste kasu honetan, berriz,$ax - x^3 = 0$ planteatuz hiru soluzio lortzen dugu: $x_1^* = 0, x_2^* = \sqrt{a}, x_3^* = -\sqrt{a}$.

Eda 8. gaia

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

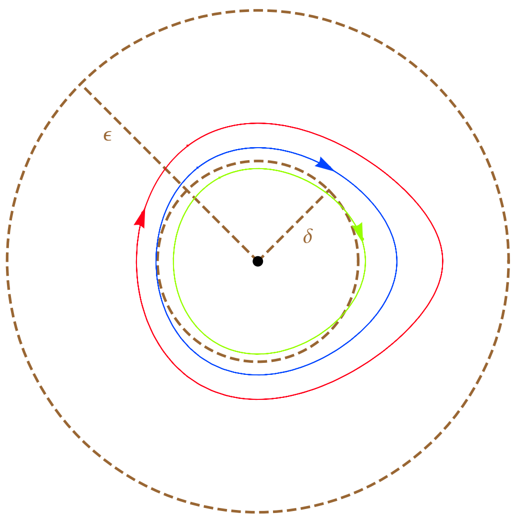
- Problema fisiko errealetan hastapen-baldintzak zehaztean erroreak egiten dira beti. Horregatik, soluzio jakin baten baldintzak apur bat aldatzean zer gertatzen den ezagutzea garrantzitsua. Soluzio berriek hasierako soluziora jotzen badut, hasierakoa egonkorra dela esaten dugu
- Fisikak egonkortasunaren adibideak ematen dizkigu.
  - Penduluan argi dago posizio bertikal maximo eta minimoa dira oreka-puntuak, energia potentziala dela eta beheko puntua egonkorra da (asintotikoki egonkorra marruskadura dagoenean).
  - Goikoa, ostera, argi dago ezegonkorra dela (edozein perturbaziok, nahi bezain txikia, pendulua puntu horretatik aldentzen du).
- Guk egonkortasuna definitzeko Liapunov-en erizpideetara joko dugu.

Eda 8. gaia

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

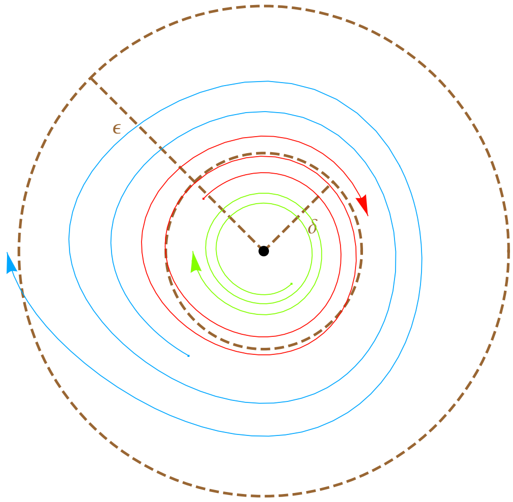
Puntu egonkorra

- $\vec{x}^*(t)$ soluzioa egonkorra da baldin eta $\epsilon > 0$ guztientzat honako hau betetzeko moduko $\delta(\epsilon)) > 0$ bat existitzen bada:
  $|\vec{x}(t_0) - \vec{x}^*(t_0)| < \delta(\epsilon)$ hastapen-baldintza betetzen duen beste edozein $\vec{x}^*(t)$ soluziok $|\vec{x}(t) - \vec{x}^*(t)| < \epsilon$ ere beteko du $t > t_0$ guztietarako.



Puntu ezegonkorra

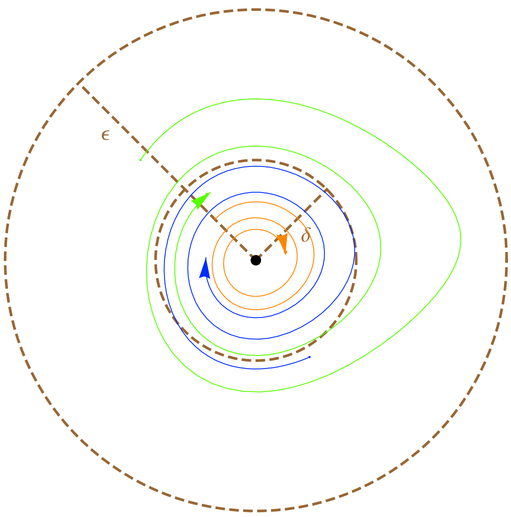
- $\vec{x}^*(t)$ soluzioa ezegonkorra da baldin eta $\delta > 0$ nahi bezain txikia izanik ere, $t > t_0$ baterako $|\vec{x}(t_0) - \vec{x}^*(t_0)| < \delta$ eta $|\vec{x}(t) - \vec{x}^*(t)| > \epsilon$ betetzen dituen $\epsilon > 0$ bat eta $\vec{x}(t)$ soluzio bat existitzen badira.



Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

Puntu asintotikoki egonkorra

- $\vec{x}^*(t)$ soluzioa asintotikoki egonkorra da baldin eta, egonkorra izateaz gain, $\delta' > 0$ balio bat badago $|\vec{x}(t_0) - \vec{x}^*(t_0)| < \delta'$ hastapen baldintza guztiei dagozkien soluzioek $lim_{t\to+\infty}|\vec{x}(t) - \vec{x}^*(t)| = 0$ betetzeko modukoa.



Eda 8. gaia

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

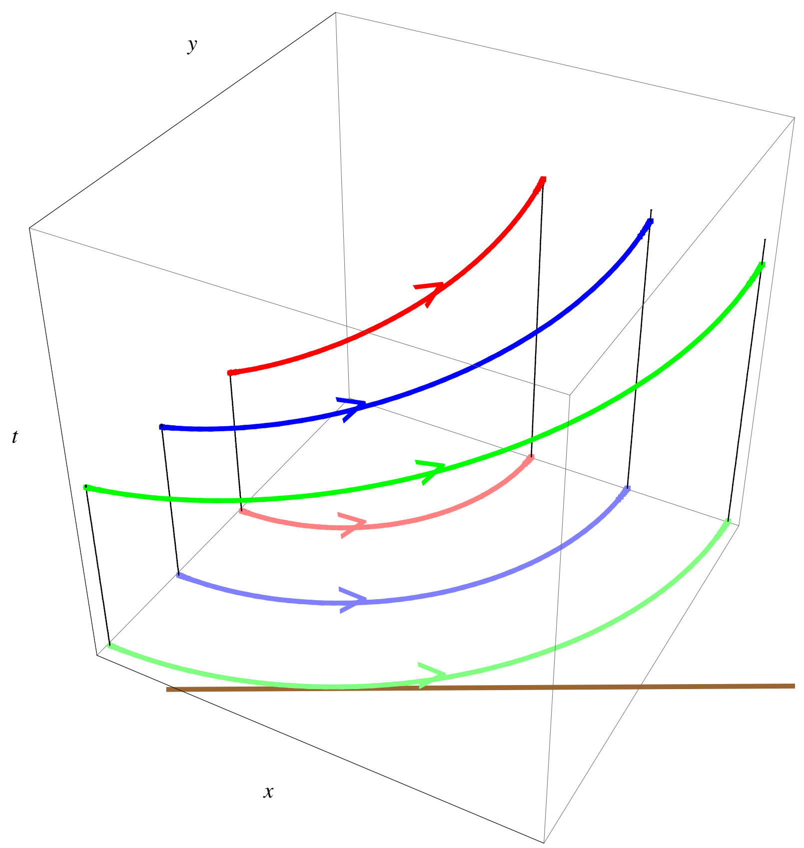
- Oreka-puntuen izaera alda daiteke parametroren baten balioak aldatzean, hori gertatzen denean adarkatze bat jazo dela esaten da.
- Hori aztertzeko adarkatze-diagrama irudikatu ahal da.
- Aldaketa hori eragiten duen parametroari adarkatze-parametro deritzo.

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

- Lehen ordenako ekuazioen adarkatze-diagramak honela marrazten dira:
  - Oreka-puntuaren posizioa adarkatze-parametroaren funtzioan marrazten da.
    - Egonkonkortasuna lerro jarraituez adierazten da
    - Ezegonkonkortasuna lerro etenez adierazten da
  - Irudian $\dot{x}$ bektore-eremuaren magnitudea eta noranzkoa (jatorrirantz edo infiniturantz) marraztu egiten da ere.

8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak

- Gai honetan zehar gehien bat honelako sistemetaz arduratuko gara:
$$\dot{x} = P(x, y)$$
$$\dot{y} = Q(x, y)$$
.
- Haren soluzio orokorrak kurba-kongruentzia bat definitzen du (t, x, y) espazioan.
- Gainera, sistema autonomoa denez, haren proekzioa beste kurba-kongruentzia bat definitzen da (x, y) fase-espazioan.
- Soluzio baten $(x(t), y(t))$ proiekzioak fase-espazioan kurba parametriko bat definitzen du, horri fase-ibilbide edofase-orbita deritzo.



8.3. IRUDIA Sistema autonomoaren soluzio orokorra eta fase-espazioan duen proiekzioa.

Eda 8. gaia

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak
Eda 8. gaia

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

- Fase-ibilbideen $y(x)$ ekuazioa kalkulatzeko, gure sistema autonomoa denez,nahikoa da ondokoa integratzea

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}.$$

  - Existentzia eta bakartasunaren teoremagatik, erregulartasuna badago, fase-ibilbideek (ekuazio horren soluzioek) ez dute elkar-ebakiko.
  - Ikus daiteke gainera fase-ibilbideak $P\hat{i} + Q\hat{j}$ eremu bektorialaren kurba tangenteak direla.
  - Eremu hori, irudi hidrodinamiko batean, abiadura-eremu bat izango dugu, eta fase-ibilbideak korronte-lerroak izango dira.

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

Sistema mekaniko unidimentsioanalak

- Sistema dinamikoen tresneria oso erabilgarria da sistema mekaniko unidimentsioanalak aztertzeko.
- Newtonen-en bigarren legearen arabera posizioaren eta abiaduraren menpekotasuna duen indar batek sortzen duen higidura-ekuazioa ondokoa da:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}).$$

- Ekuazio hura sistema modura idaz daiteke:

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = f(x, y).$$

- Jakina, sistema kontserbakorren kasua bereziki interesgarria da:

$$\ddot{x} = F(x) = -V'(x).$$

  Kasu horretan, sistema hauxe izango da:

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -V'(x).$$

Eda 8. gaia

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

8.4 Sistema quasilinealak

- Hemendik aurrera, sistema dinamikoak oreka-puntu bakarra duela joko dugu.

  Orokortasunik galtzen ez denez, joko dugu, gainera, puntu hura jatorrian dagoela:

$$P(0,0) = Q(0,0) = 0$$

.

- Suposatuko dugu, $P(x,y)$ eta $Q(x,y)$ funtzioek Taylor-en garapena onartzen dutela, hau da,

$$\dot{x} \approx a_{11}x + a_{12}y,$$

$$\dot{y} \approx a_{21}x + a_{22}y,$$

non

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} \end{pmatrix}_{(x,y)=(0,0)}$$

Eda 8. gaia

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

- Sistema quasilineala izango da hauxek betetzen badira batera:

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to 0} = \frac{P(x,y) - a_{11}x + a_{12}y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to 0} = \frac{Q(x,y) - a_{21}x + a_{22}y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

- Hau da, gai ezlinealek gai linealek baino arinago jotzen dutenean zerora.

- Sistema quasilineala gai linealak arbuiatu eta gero lortzen den sistemari hurbilketa-lineal deritzo:

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y,$$

$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y,$$

- Guk aztertuko ditugun kasuetan, oro har, puntu finkoak bakartuak izango dira, eta bertan hauxe beteko da:

$$\mathrm{det}\mathbf{A} \neq 0.$$

- Froga daiteke, gainera, **A** matrizearen erro karakteristikoak hauxex izango direla:

$$k_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}\mathbf{A} \pm \Delta\right),$$

non

$$\Delta \equiv \mathrm{tr}^2\mathbf{A} - 4\mathrm{det}\mathbf{A}.$$

Eda 8. gaia

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

8.5 Egonkortasun lineala

- Sistema kuasilinealen portaera dinamiko asintotikoa eta haien hurbilketa linealarena kualitatiboki berdinak dira, beraz, salbuespenen bat gorabehera.
- Horretan datza Liapunov-en metodoa, egonkortasun-linealaren metodo ere deritzona.
- Hurrengo azpiataletan adibide modura gehien bat erabiliko dugun sistema dinamikoa hauxe da:

$$\dot{x} = -x - y - \epsilon xy,$$

$$\dot{y} = (1 + r + d)x + (1 + r)y + \epsilon(y^2 - x^2).$$

Sistema hura guztiz lineala da $\epsilon = 0$ denean.

Eda 8. gaia

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak

$$\Delta > 0 \Rightarrow k_1 > k_2$$

- Kasu horretan k_1 eta k_2-ri ondoko bektore propioak dagozkie:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

- Hala izanik, sistema linealaren soluzio orokorra hauxe da:

$$\vec{x} = C_1\vec{x}_1 + C_2\vec{x}_2,$$

hau da,

$$x = C_1 x_1 e^{k_1 t} + C_2 x_2 e^{k_2 t},$$
$$y = C_1 y_1 e^{k_1 t} + C_2 y_2 e^{k_2 t}.$$

Eda 8. gaia
Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

- Horren ondorioz hauxe dugu soluzio-kurben maldarako:

$$\frac{y}{x} = \frac{C_1 y_1 e^{k_1 t} + C_2 y_2 e^{k_2 t}}{C_1 x_1 e^{k_1 t} + C_2 x_2 e^{k_2 t}}.$$

- Gainera, bektore propioei dagozkien soluzioetarako, oreka-puntuan soluzioak bektore propioen paraleloak dira:

$$C_2 = 0, \quad \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1},$$
$$C_1 = 0, \quad \frac{y}{x} = \frac{y_2}{x_2}.$$

Eda 8. gaia
Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

Erro erreal negatiboak

$$\boxed{\Delta > 0,\ \det A > 0,\ \mathrm{tr}A < 0 \Rightarrow k_2 < k_1 < 0}$$

- Kasu honetan

$$\lim_{t\to\infty} x = \lim_{t\to\infty} \left(C_1 x_1 e^{k_1 t} + C_2 x_2 e^{k_2 t}\right) = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} y = \lim_{t\to\infty} \left(C_1 y_1 e^{k_1 t} + C_2 y_2 e^{k_2 t}\right) = 0;$$

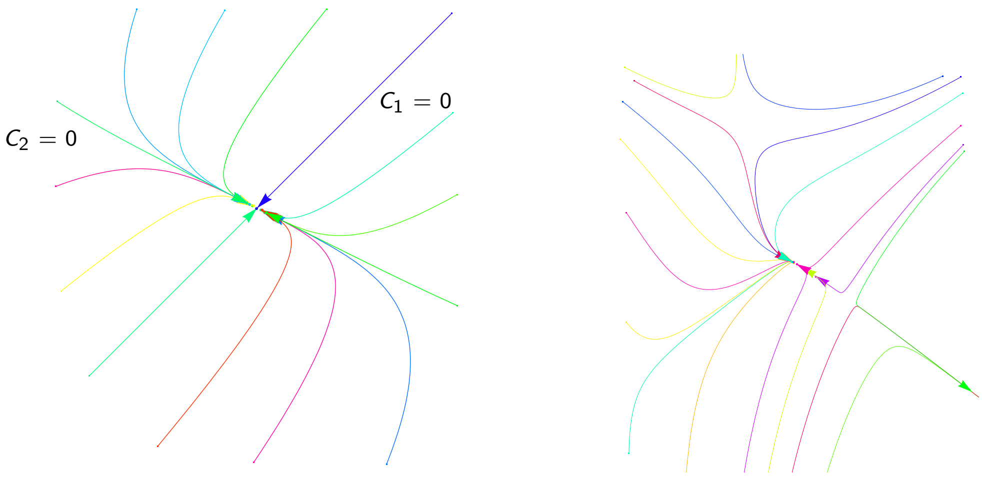
  hau da, ibilbide guztiak jatorrirantz doaz, beraz oreka puntua asintotikoki egonkorra da.

- Gainera

$$\frac{y}{x} = \lim_{t\to\infty} \frac{C_1 y_1 e^{k_1 t} + C_2 y_2 e^{k_2 t}}{C_1 x_1 e^{k_1 t} + C_2 x_2 e^{k_2 t}} = \frac{y_1}{x_1}$$

  kurba guztietarako, salbuespen bakarra $C_1 = 0$ soluzio partikularra izanik. Egitura geometrikoa hori denez puntua nodoa dela esaten da.

Guztira, beraz, puntu hura nodo asintotikoki egonkorra dugu.



8.6. IRUDIA Gure sistemaren fase-espazioa, $d = 1$, $r = -5/2$ eta (eskerreko irudia) $\epsilon = 0$ and (eskumako irudia) $\epsilon = 1$.

Eda 8. gaia

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

Erro erreal positiboak

$$\boxed{\Delta > 0,\ \det A > 0,\ \mathrm{tr}A > 0 \Rightarrow 0 < k_2 < k_1}$$

- Kasu honetan

$$\lim_{t\to\infty} x = \lim_{t\to\infty} \left(C_1 x_1 e^{k_1 t} + C_2 x_2 e^{k_2 t}\right) = \infty$$

$$\lim_{t\to\infty} y = \lim_{t\to\infty} \left(C_1 y_1 e^{k_1 t} + C_2 y_2 e^{k_2 t}\right) = \infty;$$

  hau da, ibilbide guztiak jatorritik aldentzen dira doaz, beraz, oreka puntua ezegonkorra da.

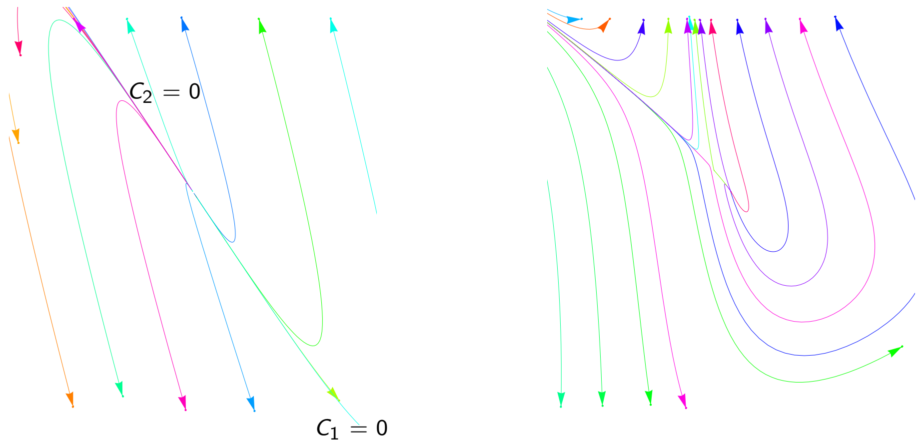
- Gainera

$$\frac{y}{x} = \lim_{t\to\infty} \frac{C_1 y_1 e^{k_1 t} + C_2 y_2 e^{k_2 t}}{C_1 x_1 e^{k_1 t} + C_2 x_2 e^{k_2 t}} = \frac{y_2}{x_2}$$

  kurba guztietarako, salbuespen bakarra $C_2 = 0$ soluzio partikularra izanik. Egitura geometrikoa hori denez puntua nodoa dela esaten da.

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

Guztira, beraz, puntu hura nodo ezegonkorra dugu.



8.7. IRUDIA Gure sistemaren fase-espazioa, $d = 1$, $r = 5/2$ eta (eskerreko irudia) $\epsilon = 0$ and (eskumako irudia) $\epsilon = 1$.

Eda 8. gaia
Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

Aurkako zeinuko erro errealak

$$\boxed{\Delta > 0,\ \det A < 0,\ \mathrm{tr} A > 0 \Rightarrow k_2 < 0 < k_1}$$

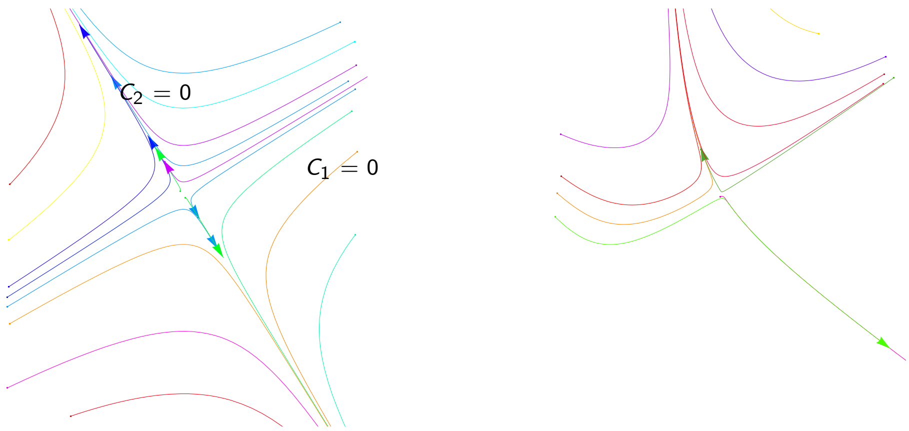
- Kasu honetan $C_1 = 0$ soluzio partikularra jatorrirantz doa, espazio egonkorra deitzen den $y/x = y_2/x_2$ zuzenean zehar.
- Baina $C_2 = 0$ soluzio partikularra jatorritik aldentzen da , espazio ezegonkorra deitzen den $y/x = y_1/x_1$ zuzenean zehar.
- Beste soluzio guztien portaera hauxe da:
  - etorkizuneko infinituan espazio ezegonkorrera hurbiltzen dira, hau da,
  $$\lim_{t\to\infty} y/x = y_1/x_1$$
  - iraganeko infinituan espazio egonkorrera hurbiltzen dira, hau da,
  $$\lim_{t\to\infty} y/x = y_1/x_1$$

Eda 8. gaia

Egonkortasunaren teoria

8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

Puntuaren egitura geometrikoa hori denez, zela-puntua edo mendatea dela esaten da.



8.8. IRUDIA Gure sistemaren fase-espazioa, $d = r = -1$, eta (ezkerreko irudia) $\epsilon = 0$ and (eskumako irudia) $\epsilon = 1$.

8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak

$$\Delta < 0 \Rightarrow k_+ = \alpha + i\omega, k_+ = \alpha - i\omega,$$

- Kasu horretan, sistema linealaren soluzio orokorra hauxe da:
$$x = e^{\alpha t}(C_1 x_1 \cos\omega t + C_2 x_2 \sin\omega t),$$
$$y = e^{\alpha t}(C_1 y_1 \cos\omega t + C_2 y_2 \sin\omega t).$$
- Orduan gai gai periodikoak agertzen dira, esponentzial batez modulatuta.

Parte erreal negatiboko erro konplexuak

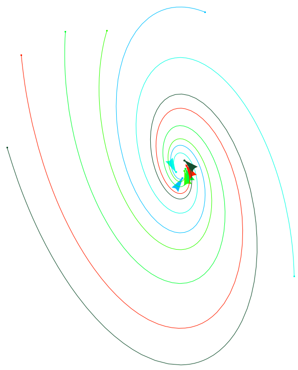
$$\boxed{\Delta < 0,\ trA < 0 \Rightarrow \alpha < 0}$$

- Kasu honetan maldaren adierazpena hauxe izango da:
$$\frac{y}{x} = \frac{C_1 y_1 \cos\omega t + C_2 y_2 \sin\omega t}{C_1 x_1 \cos\omega t + C_2 x_2 \sin\omega t}$$
- Beraz, malda biraka dabil, eta soluzio guztiek jatorrirantz hurbiltzen badira ere, hori ez da gertatzen norabide finko batean.

Eda 8. gaia

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

Puntu-mota horri foku edo puntu espiral deritzo.



8.9. IRUDIA Gure sistemaren fase-espazioa, $d = 3$, $r = -1$ eta $\epsilon = 0$ balioekin.

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

Parte erreal positiboko erro konplexuak

$$\boxed{\Delta < 0,\ trA > 0 \Rightarrow \alpha > 0}$$

- Kasu honetan aurreko kasuan aurkitu dugunaren portaera antzekoa dugu.
- Malda biratzen da, eta kurba guztiak zentrutik urruntzen dira.

Eda 8. gaia

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

Erro irudikariak

$$\boxed{\Delta < 0,\ trA = 0 \Rightarrow \alpha = 0}$$

- Kasu honetan orbitak periodikoak dira:

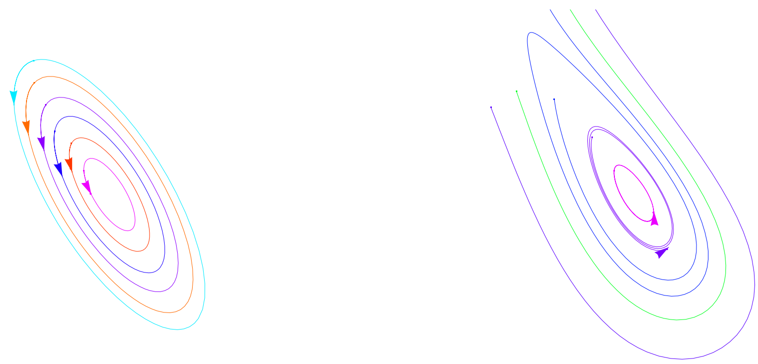
$$x = e^{\alpha t}(C_1 x_1 \cos\omega t + C_2 x_2 \sin\omega t),$$

$$y = e^{\alpha t}(C_1 y_1 \cos\omega t + C_2 y_2 \sin\omega t).$$

- Puntua egonkorra den arren, ez da asintotikoki egonkorra.
- Horrelako puntuei zentro edo zurrunbilo deritze.

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

- Gai ez lineal eragina oso garrantzitsua izan daiteke, eta puntuaren geometria guztiz desitxuratu.
- Hurbilketa linealean zentrua den puntu bat, foku bihur daiteke gai ez linealengatik, baina zentro izaten jarrai dezake ere.



8.10. IRUDIA Gure sistemaren fase-espazioa, $d = 1$, $r = 0$ eta $\epsilon = 0$ (ezkerreko irudia) and (eskumako irudia) $\epsilon = 1$ balioekin.

Eda 8. gaia

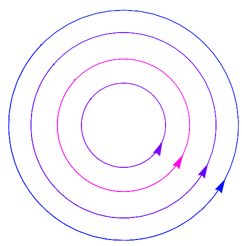
Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

- Ikus dezagun beste adibide bat:

$$\dot{x} = -y$$

$$\dot{y} = x - ay^n$$

- Hurbilketa linealean jatorria zentrua da.



8.11. IRUDIA Sistema berriaren fase-espazioa $a = 0$ balioarekin.

Eda 8. gaia

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

- Normalean, estruktura periodikoa galtzen da simetria-hausketa bat gertatu delako.
  - Ikus daiteke $\dot{x} = -y, \quad , \dot{y} = x$ sistema linealak

    $$y \to -y, \; t \to -t$$

    simetria daukala.
  - Argi eta garbi, tranformazio horren bi ondorio

    $$\dot{x} \to -\dot{x}, \; \dot{y} \to \dot{y}$$

    ditugu, eta guztira sistema ez da aldatzen.
- Gure sistemari $-ay^2$ gai ez lineala gehitzen zaionean simetria mantentzen da.
- Baina hori ez da gertatzen $-ay^3$ gai ez lineala gehitzen zaionean, zeren transformazioak $y^3 \to -y^3$ egiten duen.

8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak

$$\Delta = 0 \Rightarrow k_1 = k_2$$

- Kasu honetan hauxe ikus daiteke:

$$k_1 = k_2 0 \frac{1}{2} \mathrm{tr} A.$$

- Gainera

$$\Delta \equiv = (a_{11} - a_{22}) + 4a_{12}21 = 0,$$

denez, bi kasu bereiz daiteke.

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

Erro berdinak: lehenengo kasua

$$\boxed{a_{12} = a_{21} = 0}$$

- Kasu honetan $a = a_{12} = a_{21} = 0$ eta orbitak lerrozuzenak dira:

$$x = C_1 e^{at}, \; y = C_2 e^{at}.$$

- Dena den, haien maldak desberdinak dira, eta horrelako puntua nodo propioa edo izar-nodoa dugu.

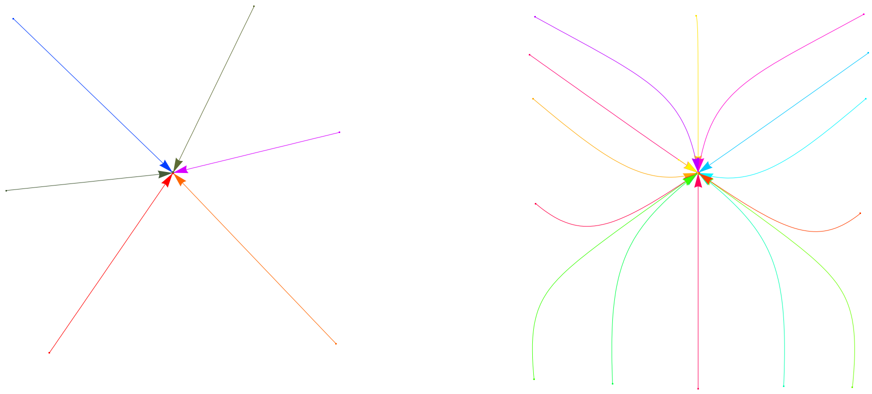
Eda 8. gaia

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

- Halako adibidea ondoko sistema dugu:

$$\dot{x} = -x - \epsilon xy,$$

$$\dot{y} = -y - \epsilon(y^2 - x^2).$$



8.12. IRUDIA Sistema berriaren fase-espazioa $\epsilon = 0$ (ezkerreko irudia) $\epsilon = 1$ (eskumako irudia).

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

Erro berdinak: bigarren kasua

$$\boxed{|a_{12}| + |a_{21}| = 0}$$

- Kasu honetan orbitak honelakoak dira:

$$x = (C_1x_1 + C_2(x_1t + x_2))e^{kt},$$

$$y = (C_1y_1 + C_2(y_1t + y_2))e^{kt}.$$

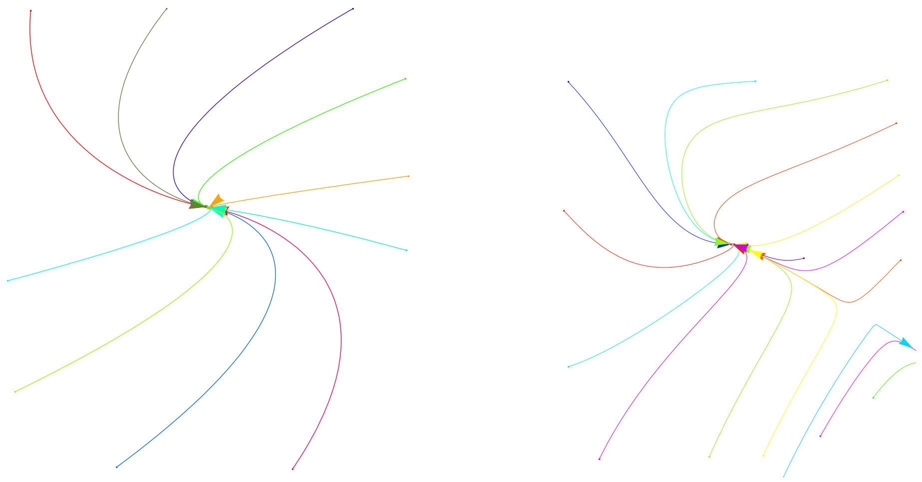
- Malda guztiak berdinak dira asintotikoki, zehazki,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1},$$

eta horrelako puntua nodo endekatua dugu.

Eda 8. gaia
Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak



8.13. IRUDIA Ohiko sistemaren fase-espazioa $d = 1$, $r = -2$ eta $\epsilon = 0$ (ezkerreko irudia) $\epsilon = 1$ (eskumako irudia) balioetarako.

Eda 8. gaia

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

- Partikula baten gainean $F = -V'(x)$ indar kontserbakorrak eta $R = -\gamma\dot{x}$ marruskadura indarrak $(\gamma \geq)$ eragiten dutela.
- Haren higigura ekuazioa hauxe izango da:

$$\ddot{x} = -V'(x) - \frac{\gamma}{m}\dot{x}$$

- Ekuazio hori, sistema baten antzera idaz daiteke $v = \dot{x}$ definituz:

$$\dot{x} = P(x, v) \equiv v$$

$$\ddot{v} = Q(x, v) \equiv -V'(x) - \frac{\gamma}{m}v$$

- Ikus daiteke, $x = x^*$ puntuan $V(x^*) = 0$ betetzen bada orduan hurbilketa linealean ondokoa izango dugu:

$$\dot{x} = v$$
$$\ddot{v} = -V''(x^*) - \frac{\gamma}{m} v.$$

- Horri dagozkion erro karakteristikoak hauxek dira:

$$k_{1,2} = -\frac{\gamma}{m} \pm \sqrt{-V''(x^*) + \left(\frac{\gamma}{m}\right)^2}.$$

- Ikus dezagun horrelako puntuetan aurkitzen dugun puntuen sailkapena.

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

Maximo lokala

$$\boxed{V''(x^*) < 0 \Rightarrow k_2 < 0 < k_1}$$

- Kasu horretan mendatea edo zela-puntua dugu.

Inflexio-puntua edo goi-ordenako muturra

$$\boxed{V''(x^*) = 0 \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = -\gamma}$$

- Kasu horretan mendatea oreka-puntua ez da hiperbolikoa, eta hurbilketa linealaren metodoak ez digu ezer esaten. Bestelako informazioa erabiliz puntua erpin itxurakoa dela ikus daiteke.

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

Minimo lokala

$$\boxed{V''(x^*) > 0}$$

- Kasu horretan bi azpikasu bereiz daitezke.
  - $\gamma^2 < 4V''(x^*)$ (marruskadura handiegia)
    Kasu honetan erroak konplexuak dira, eta parte erreal negatibokoak: oreka-puntua foku asintotikoki egonkorra izango da.
  - $\gamma^2 > 4V''(x^*)$ (marruskadura txikia)
    Kasu honetan erroak erreal eta negatiboak: oreka-puntua nodo asintotikoki egonkorra izango da.

Egonkortasunaren teoria
8.1 Egonkortasunaren kontzeptua
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak
8.4 Sistema quasilinealak
8.5 Egonkortasun lineal
8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak
8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak
8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak
8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak