Ekuazio diferentzial arruntak
3. gaia

Goi-ordenako ekuazioak

3.1 Esangura geometrikoa, 3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema, 3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna, 3.4 Ordena-beheratzea, 3.5 Funtzioen menpekotasun lineala, 3.6 Ekuazio diferentzial linealak, 3.7 Ekuazio lineal homogeneoak, 3.8 Ekuazio lineal osoak, 3.9 Oinarrizko soluzioa, 3.10 Koefiziente konstanteetako ekuazio homogeneoak, 3.11 Koefiziente konstanteetako ekuazio osoak

Eda 3. gaia

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

3.1 Esangura geometrikoa

- Goi-ordenako ekuazioen esangura geometrikoa lehen-ordenakoen kasuan ikusitakoaren orokorpena dugu.
- Demagun kurba lauen familia baten ekuazioan $C_1, C_2, \ldots, C_n$ parametro independenteak daudela.
  - Ekuazio finitua eta haren lehenengo n deribatuak hauek dira:

$$
\begin{aligned}
\varphi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) &= 0, \\
\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' &= 0, \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y'' &= 0, \\
&\vdots \\
\frac{\partial^n \varphi^n}{\partial x^n} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y^{(n)} &= 0,
\end{aligned}
$$

- Ekuazio guzti horiek erabiliz, n parametroak desagertarazi daitezke eta horrela familiaren ekuazio diferentziala lortzen da:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

- Kurba-familiaren $\varphi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ ekuazioa aurreko ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra da eta haren kurba bakoitza kurba integral bat.

3.1 Ariketa

- Zein da unitate-erradioko zirkunferentzien ekuazio diferentziala?
- Kasu honetan, $C_1 = a$ eta $C_2 = b$ hartuz, $\varphi(x, y, C_1, C_2) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - 1 = 0$ dugu. Behar dugu beste ekuazio bi:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 2(x-a) + 2(y-b)y' = 0$$

eta

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y'' =$$

$$2 + 0 + 2y'^2 + 2(y-b)y'' = 2(1 + y'^2) + 2(y-b)y'' = 0$$

Lehen deribatuak ematen du $(x-a)^2 = (y-b)^2 (y')^2$ eta emaitza hura ekuazio finituarekin konbinatuz, $(y-b)^2(1 + y'^2) = 1$ lortzen dugu.

Eda 3. gaia

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

Ekuazio finituak eta haren lehenengo deribatuak ondokoa ematen dute:

$$\frac{1}{1+y'^2} = (y-b)^2.$$

Bigarren deribatuak, berriz, hau ematen du:

$$(1+y'^2)^2 = (y-b)^2 y''^2.$$

Orduan guztira, bilatutako ekuazioa ondokoa da:

$$(1+y'^2)^3 = y''^2.$$

3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema

- Ekuazio diferentzial baten

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

forma normalean f funtzioa eta $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial y'$, $\partial f/\partial y(n-1)$ deribatuak jarraituak badira, ekuazioa eta ondoko n hastapen-baldintzak betetzen dituen soluzio bakarra dago:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y'_0 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna

- Ezezagun eta ekuazioen kopurua handituz, beti behera daiteke ekuazio baten ordena.
- Izan ere,

$$y_1 \equiv y,\ y_2 \equiv y', \dots, y_n \equiv y^{(n-1)},$$

menpeko aldagai berriak definitzen baditugu, n ordenako $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ ekuazioa lehen ordenako n ekuazioen hurrengo sistemaren baliokidea da:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\vdots \\ y_n' &= f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{aligned}$$

3.2 ariketa

- Idatzi osziladore harmoniko bortxatuaren ekuazioa sistema baten moduan
- Menpeko aldagaia x eta aldagai independentea t bada, orduan ekuazioa ondokoa dugu:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(x)}{m}.$$

Sistema modura adierazteko ekuazioa $x_1 = x$ eta $x_2 = \dot{x}$ egin behar dugu.
Hori eginez,

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = \frac{F(x_1)}{m} - \omega^2 x_1,$$

idatzi ahal izango dugu, eta hori izango da gure sistema.

Eda 3. gaia

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

3.4 Ordena-beheratzea

- Goi-ordenako ekuazioak ebazteko prozedura orokor gutxi dago.
  - Haien artean ordena beheratzen saiatzea dago.
  - Kasu berezi batzutan hori modu sistematikoan egin daiteke.

Menpeko aldagai gabeko ekuazioak

- Demagun $F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ moduko ekuazioa dugula.
  - Kasu honetan menpeko aldagai berria hartzeak komeni du: $u \equiv y', u' \equiv y'', \dots, u^{(n-1)} \equiv y^n$.
  - Horrek lehen ordenako ekuazio diferentzial bat ematen digu:
$$F(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}) = 0.$$
- Jo dezagun $\tilde{\varphi}(x, u, C_1, \dots, C_{n-1}) = 0$ ekuazio berriaren soluzio orokorra dela
  - Orduan, $u = y'$ aldaketa deseginez, lehen ordenako ekuazio diferentzialen familia bat dugu: $\tilde{\varphi}(x, y', C_1, \dots, C_{n-1}) = 0$,
  - Hura askatuz jatorrizko ekuazioaren soluzio orokorra lortzen da: $\varphi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$.

Eda 3. gaia

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

- Gainera $F(x, u, u', \ldots, u^{(n-1)}) = 0$ ekuazioaren soluzio singular bakoitzak lehen ordenako ekuazio diferentzial ematen digu.
  Hura ebatziz jatorrizko ekuazioaren soluzio singularrak lortzen dira.

- Jakina, y aldagaiaz gain, $y', \ldots, y^{(m-1)}$ deribatuak ere falta badira, $u \equiv y^m$ aldaketa eginez, jatorrizko ekuazioa $n - m$ ordenakoa bihurtzen da.

- Ikus dezagun adibidez $y''^2 = 240x^2y' = 0$ ekuazioa.
  Bigarren ordenakoa denez $u = y'$ egingo dugu, eta horrek $u' = \pm\sqrt{240}x\sqrt{u}$ ematen du, beraz, $du/\sqrt{u} = \pm\sqrt{240}xdx$ integrala egin behar dugu.
  Horren emaitza
  $4\sqrt{u} = \sqrt{240}(x^2 + C_1) = \sqrt{15 \times 16}(x^2 + C_1)$ dugu, eta aldaketa deseginez ondoko ekuaziora iristen gara:
  $y' = 15(x^2 + C_1)^2$.
  Azkenik, aurrekoa garatuz eta berriro integratuz, $y = 3x^5 + 10C_1x^3 + 15C_1x + C_2$ soluzio orokorra ondorioztatzen dugu.
  Bestalde, $y' = 0$ soluzio singularra ezin dugu ahaztu, honek $y = C_3$ kurba-familia ematen digu.

Eda 3. gaia

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

3.3 ariketa

- Partikula puntual bat zuzen bertikal batean zehar ari da jausten jariakin batean grabitatearen eraginpean. Marruskadura abiaduraren proportzionala bada, zein da abiadura aldiune guztietan? Froga ezazu muga-abiadura batera iristen dela.
- Partikularen higidura deskribatzen duen ekuazioa $m\ddot{z} = -mg - k\dot{z}$ da.
  Orduan, $v = \dot{z}$ aldaketa komeni zaigu eta ekuazioa honelaxe geratzen da: $\dot{v} = -g - kv/m$.
  Integrazio hutsez
  $$v = -\frac{gm}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}t}$$
  lortzen da eta argi dago abiadura limite bat dagoela:
  $$\lim_{t\to\infty} v = -gm/k.$$
  Bukatzeko $\dot{z} = v$ aldaketa deseginez eta integratuz $z = -\frac{m}{k}\left(gt + Ce^{-\frac{k}{m}}\right)$ lortzen da.

Ekuazio autonomoak

- Gure ekuazioaren aldagai independentea ez bada agertzen autonomoa da: $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$.
  - Orduan $\varphi(x, y)$ soluzioa bada, $\varphi(x - x_0, y)$ soluzioa da ere edozen x_0-rako.
  - Horregatik hautazko konstanteetako bat jatorriari dagokio eta soluzio orokorra honela adieraz daiteke:
  $$\varphi(x - x_0, y, C_1, \dots, C_{n-1}) = 0.$$
- Ordena beheratzeko $u \equiv y'$ egiten da, eta beraz:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{du}{dy}u \\ y''' &= \frac{d^2u}{dy^2}u^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 u \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= \frac{d^{n-1}u}{dy^{n-1}}u^{n-1} + \dots + \left(\frac{du}{dy}\right)^{n-1} u \qquad (1) \end{aligned}$$

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

- Aurrekoak jatorrizko ekuazioan ordezkatuz $n-1$ ordenako ekuazio berria lortuko da:

$$F(y, u, du/dy, d^2u/dy^2, \ldots, d^{n-1}u/dy^{n-1}) = 0.$$

- Ekuazio horren soluzio orokorra $\tilde{\varphi}(y, u, C_1, \ldots, C_{n-1}) = 0$, bada, bertan $u = y'$ eginez beste ekuazio diferentzial bat lortzen da.
- Hura askatuz jatorrizko ekuazioaren soluzio orokorra lortzen da: $\varphi(x - x_0, y, C_1, \ldots, C_{n-1}) = 0$.

3.4 ariketa

- Ebatzi $y'' = (2y+1)y'$ ekuazioa.
- Autonomoa denez, $u \equiv y'$ egingo dugu eta notazioa sinplifikatzeko $\dot{u} = du/dy, \ddot{u}d^2u/dy^2, \ldots$ egingo dugu. Lehen ikusitakoaren arabera, $y'' = udu/dy = u\dot{u}$, beraz ebatzi behar dugun ekuazio berria hauxe da:

$$\dot{u}u = (2y+1)u = 0.$$

Argi eta garbi, $u = \int (2y+1)dy = y^2 + y + C_1$ (dena den bidean utzi dugu, $u = 0$ soluzioa).
Aldaketa deseginez, $y' = y^2 + y + C$ ekuazioa geratzen zaigu eta hura integratuz ondokoa lortzen da [Spiegel, 263 orr., 1.12.1]:

$$\frac{2}{\sqrt{4C_1 - 1}} \arctan\left(\frac{1+2y}{\sqrt{4C_1 - 1}}\right) = x + C_2.$$

Eda 3. gaia

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

Ekuazio x-rekiko ekidimentsionalak

- Ekuazio horiek $x \longrightarrow ax$ eskala-aldaketa guztiekiko aldaezinak dira, hau da,

$$F(ax, y, a^{-1}y', a^{-2}y'', \ldots, a^{-n}y^{(n)}) =$$
$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

  - Horrelako ekuazioak autonomo bihur daitezen $x \longrightarrow t \equiv \ln x$ aldaketa egiten da. Horrela

$$\begin{aligned} x &= e^t \\ y' &= \frac{1}{x}\dot{y} \\ y'' &= \frac{1}{x^2}(\ddot{y} - \dot{y}) \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= \frac{1}{x^n}\left[\frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{dy}{dt}\right]. \end{aligned}$$

- Ikus daiteke $F(x, y, y', y'', \ldots) = 0$ jatorrizko ekuazioa $F(1, y, \dot{y}, \ddot{y} - \dot{y}, \ldots) = 0$ ekuazioaren baliokidea dela.
- Azken hau ekuazioa autonomoa denez, haren soluzioan $u \equiv \dot{y}$ aldaketa egitea komeni du. Lehen ordenako ekuazio berri bat lortzen da eta hura askatuz bukatzen da ebazpena.

Eda 3. gaia

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

3.5 ariketa

- Ebatzi $xy'' = yy'$ ekuazioa.
- Kontuan izanik $y' = \dot{y}/x$ eta $y'' = (\ddot{y} - \dot{y})/x^2$, ondoko moduan geratzen zaigu ekuazioa:

$$x\left[\frac{1}{x^2}(\ddot{y} - \dot{y})\right] = \frac{y\dot{y}}{x}.$$

Hura $\ddot{y} = (1+y)\dot{y}$ ekuazio autonomoaren baliokidea da (baina amaieran kontuan izan agian $y = 0$ galdu dela).
Baina, ekuazio honen emaitza "ezaguna" zaigu, $y \to 2y$ eta $x \to t$ eginez 3.4 ariketan ebatzi dugun ekuazio berbera lortzen dugu .
Bilatutako emaitza ariketa horretan lortutako soluzioan $2y \to y$ eta $t \to x$ transformazioak eginez lortzen da.
Ondorioz, problema berri honen soluzio orokorra hauxe da:

$$\frac{2}{\sqrt{4C_1 - 1}} \arctan\left(\frac{1+y}{\sqrt{4C_1 - 1}}\right) = t + C_2.$$

Horretaz gain, $y = C_3$ soluzio singularra existitzen da ere.

Ekuazio y-rekiko ekidimentsionalak

- Ekuazio horiek $y \to ay$ eskala aldaketa guztiekiko aldaezinak dira, hau da,

$$F(x, ay, ay', ay'', \dots, ay^{(n)}) =$$

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

- Horrelako ekuazioak autonomo bihur daitezen $u = y'/y$ aldaketa egiten da.
Orduan

$$\begin{aligned} y' &= yu, \\ y'' &= y(u' + u^2), \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= y(u^{(n-1)} + \cdots + u^n). \end{aligned}$$

Eda 3. gaia

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

- Ikus daiteke $F(x, y, y', y'', \dots) = 0$ jatorrizko ekuazioa $F(x, 1, u, u', u' + u^2 \dots) = 0$ ekuazioaren baliokidea dela.
- Hura ebatzi eta gero, $u = y'/y$ aldaketa deseginez lehen ordenako ekuazio berri bat lortzen da eta hura askatuz bukatzen da ebazpena.

3.6 ariketa

- Ebatzi $yy'' = y'^2$ ekuazioa.
- Bigarren ordenako ekuazioa dugunez, $y' = yu$ eta $y'' = y(u' + u^2)$ erabili behar dugu.
  Hala eginez $y(y(u' + u^2)) = (yu)^2$ lortzen da, eta y faktoreak sinplifikatzean $y = 0$ galtzen da.
  Ebatzi beharreko ekuazio berria $u' = 0$ dugu, eta berehala integratzen da $u = C_1$ emanez.
  Hasierako aldaketa desegitean $y' = C_1 y$ lortzen dugu, eta azkenik soluzio orokorra hauxe dugu:

  $$\ln y = C_1 x + C_2, \quad y = e^{C_1 x + C_2}.$$

  Bestalde, $y = 0$ soluzioa ez da benetan galdu $C_2 \to -\infty$ limitean berreskuratzen baita eta orduan soluzio partikularra baino ez da.

Eda 3. gaia

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

- Demagun ekuazioa deribatu zehatza dela, hau da,

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0.$$

- Orduan

$$G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C$$

koadraturak lehen integral bat ematen digu.

- Koadratura hori $n-1$ ordenako ekuazio diferentziala da, noski, eta hori izango da ebatzi beharreko ekuazio berria.

3.7 ariketa

- Askatu $yy'' + y'^2 = 0$
- Kasu honetan ikuskapenaz hauxe ondorioztatzen da:

$$yy'' + y'^2 = \frac{d}{dx}(yy') = 0.$$

Beraz $yy' = C_1$ lehen integrala da.
Azkenik, integrazio hutsez

$$y^2 = 2C_1 x + C_2$$

lortzen da.

Eda 3. gaia

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

- Batzutan, zehatza ez den jatorrizko ekuazio bat, forma zehatzera ekarri daiteke faktore integratzaile edo transformazio egokiaren bidez.

3.7 ariketa

- Egiaztatu $yy'' - y'^2$ ekuazioa y^2-rekin zatituz zehatz bihurtzen dela. Soluzio singularrik dago?
- Ikuskapenaz ondokoa asmatzen da:

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y}\right) = 0.$$

Orduan, $y'/y = C_1$ lehen integrala dugu, eta hura askatuz

$$\ln y = C_1 x + C_2,$$

$$y = e^{C_1 x + C_2}$$

soluzio orokorra lortzen da.
Printzipioz $y = 0$ soluzioa galduta egon liteke, baina $C_2 \to -\infty$ limitean berreskuratzen denez, orokorraren barne dago.

Eda 3. gaia

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

3.5 Funtzioen menpekotasun lineala

- Edozein ekuazio lineal homogeneoaren soluzioen multzoa espazio bektoriala da.
  - Funtzioen ohiko batuketak eta biderketak induzitzen dute estruktura hori.
  - Espazio hura funtio erregularren infinitu dimentsioko espazioaren aspiespazioa da.
- Erabil dezagun $y_k(x)$ notazioa edozein soluzio adierazteko.
- Dakigunez $y_k(x)$ funtzio guztiak gure ekuazio lineal homogeneoaren soluzioa badira, orduan $y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k(x)$ soluzioa da ere, baina ikusiko dugunez, soluzio orokorra era sinpleagoan adieraz daiteke.

- Funtzioen definizio tartea I bada

$$\{y_k(x) : k = 1, \dots, n; x \in I\}$$

funtzio erregularrak linealki independenteak izango dira baldin eta soilik baldin

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k(x) = 0 \quad (\forall x \in I)$$

erlazioa $c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_n = 0$ kasuan baino ez bada betetzen.

- Adibidez, $1, x, x^2, \dots, x^n$ berreturen multzoa linealki independentea da edozein tartetan.
  - Izan ere, $c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_n x^n = 0$ polinomioaren koefiziente guztiak ez badira nuluak polinomioa ez da nulua bere erroetan baino .
  - Baina erroen kopurua gehienez n delako, erroek ezin dute tarte oso bat bete.

Eda 3. gaia

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

- Funztioen arteko menpekotasun lineala aztertzeko wronskiarra erabilgarria da.
- Haren definizioa, $\{y_k(x) : k = 1, \dots, n; x \in I\}$ funtzio-multzorako hauxe da:

$$W[y_1, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Eda 3. gaia

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

- Bestalde, $y_k(x) : k = 1, \dots, n; x \in I$ multzoa linealki menpekoa bada, posiblea da $c_1, c_2, \dots, c_n$ kontansteetako multzo ez identikoki nulua aurkitzea zeinetarako $\sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k(x) = 0$ betetzen den tartearen edozein x punturako.
- Baina aurreko konbinazio linealaren lehen $n-1$ lehen deribatuak tarte osoan nuluak izango dira ere, beraz:

$$\begin{array}{cccc} c_1 y_1(x) n+ & c_2 y_2(x)+ & \cdots + & c_n y_n(x) = 0, \\ c_1 y_1'(x)+ & c_2 y_2'(x)+ & \cdots + & c_n y_n'(x) = 0, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots, \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x)+ & c_2 y_2^{(n-1)}(x)+ & \cdots + & c_n y_n^{(n-1)}(x) = 0. \end{array}$$

- Aurreko ekuazio-sistemak x puntu bakoitzean c_k ezezagunak dituen sistema lineal homogeneoa definitzen du.
  - Menpekotasun linealaren hipotesiagatik sistema horren soluzioa ez nulua da.
  - Beraz, tarteko puntu guztietan sistemaren determinantea, wronskiarra alegia, nulua izango da.
- Gure ondorioa nagusia hauxe da: funtzio-multzo linealki menpeko baten wronskiarra nulua da definizio-tarteko puntu guztietan.
- Horregatik, wronskiarra identikoki nulua ez bada, funtzioak linealki independenteak dira.

3.10 ariketa

- Frogatu $1, x, x^2, \dots, x^n$ linealki independenteak direla haien wronksiarra erabiliz
- Berehala kalkulatzen da ondokoa:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^n \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 & \dots & nx^{n-1} \\ 0 & 0 & 2 & 6x & \dots & n(n-1)x^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n! \end{vmatrix},$$

baina $W = 1 \times 2 \times 6 \cdots \times n! \neq 0$ eta orduan indepedentzia lineala dago.

(Otsaila-03) azterketako kuestioa

- Eztabaidatu $x-2$, x^3-x eta $6x^3-3x-6$ funtzioak linealki independenteak direnentz lerro errealean.
- Erantzuteko aztertu ahal dugu

$$c_1(x-2)+c_2(x^3-x)+c_3(6x^3-3x-6)=0$$

konbinazio linealaren jokaera lerro errealeko hiru puntutan.
Adibidez, $x=0$, $x=2$, $x=-1$ eta puntuek ondoko sistema ematen digute:

$$-2c_1-6c_3=0,$$

$$6c_2+36c_3=0,$$

$$-3c_1-4c_2-6c_3=0.$$

- Bigarrenak $c_2=-6c_3$ ematen digu, eta hirugarrenean ordezkatuz $-3c_1-3c_2=0$ ondorioztatzen da, hau da, $c_1=-c_2$.
Lehenengoak, berriz $2c_1=-6c_3$ ematen digu, baina aurreko emaitzak erabiliz, $2c_1=c_2$ bilakatzen da.
Lehendik $c_1=-c_2$ erlazioa genuenez, $c_1=0=c_2=c_3$ ondorioztatzen da, eta ez dago menpekotasun linealik.

Eda 3. gaia

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

3.6 Ekuazio diferentzial linealak

- Definizioz ekuazio linealek ondoko itxura dute:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n y = b(x).$$

  - Ekuazioa a_0-rekin zatitzean definizio-tartea baino ez da aldatzen.
  - Orokorrean $a_0 = 1$ joko dugu aurrerantzean.
  - Gainera, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ eta b funtzioak I tartean jarraituak direla joko dugu beti ($b = 0$ dugunean ekuazioa homogeneoa izango da, eta ez homogeneoa kontrako kasuan).

- Noiz edo noiz ondoko bi eragileek eskeintzen duten notazio konpaktuagoa erabiliko dugu:

$$D \equiv \frac{d}{dx},$$

$$L \equiv D^n + a_1(x)D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)D + a_n(x).$$

- Horrela, L eragaileak I tartean definitutako $f(x)$ funtzio baten gainean eragiten duenean ondokoa izango dugu:

$$\begin{aligned}(Lf)(x) &= f^{(n)}(x) + a_1(x)f^{(n-1)}(x) + \cdots + \\ &\quad a_{n-1}(x)f'(x) + a_n f(x).\end{aligned}$$

- Ondorioz, ekuazio lineal ez homogeneoa honelaxe adieraz daiteke: $Ly = b$.
- Gainera, eragile hura lineala da, jakina:

$$L(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 L f_1 + c_2 L f_2$$

edozein c_1 eta c_2 konstanteetarako.

Eda 3. gaia
Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

Ariketatxoak

- Idatz ezazu ω maiztasuneko osziladore harmonikoaren ekuazioa D eragilea erabiliz.
- Ohiko notazioan ekuazioa hauxe da:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

beraz, D eragilea erabiliz honelaxe geratuko da: Horrek esan nahi du $L = D^2 + \omega^2$ izango dugula ere, eta L horretarako jatorrizko ekuazioa $Lx = 0$ moduan idatzi ahal izango dugu.

3.7 Ekuazio lineal homogeneoak

- Ekuazio lineal homogeneorako hauxe dugu:

$$Ly = 0.$$

- Gainera, gainezarmenaren printzipioa eta L eragilearen linealtasuna baliokideak dira eta, y_k-ren bidez ekuazio homogeneoaren soluzioak adierazten baditugu hauxe dugu:

$$Ly_k = 0 \Rightarrow L\sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k L y_k = 0.$$

  - Aurreko emaitzak ekuazio lineal homogeneoaran soluzioek osaturiko multzoa espazio bektoriala dela frogatzen du.
  - Haren dimentsioa asmatzeko wronskiarra aztertu beharko dugu.

Eda 3. gaia

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

3.1 teorema

Kontsidera ditzagun I tartean definituriko n ordenako ekuazio lineal homogeneoaren n soluzio: $Ly_k = 0$. Hurrengo hiru baieztapenak baliokideak dira:

1. y_k funtzioak linealki menpekoak dira I tartean.
2. y_k funtzioen wronskiarra identikoki nulua da I tarte osoan.
3. y_k funtzioen wronskiarra nulua da $x_0 \in I$ puntu batean.

- Bestalde, n ordenako ekuazio homogeneoaren soluzio-espazioaren dimentsioa ezin da n baino txikiagoa izan.
- Hori ikusteko existentzia eta bakartasunaren teorema erabili ahal da. Horrek esaten du

$$\begin{aligned} y_1(x_0) &= 1 \\ y_1'(x_0) &= 0 \\ &\vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

hastapen-baldintzen problemaren soluzioa bakarra dela.
- Gainera, antzeko n hastapen-baldintzen problema eraiki dezakegu:

$$\begin{array}{cccc} y_1(x_0) = 1 & y_2(x_0) = 0 & \ldots & y_n(x_0) = 0, \\ y_1'(x_0) = 0 & y_2'(x_0) = 1 & \ldots & y_n'(x_0) = 0, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ y_1^{(n-1)}(x_0) = 0 & y_2^{(n-1)}(x_0) = 0 & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) = 1. \end{array}$$

Eda 3. gaia

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

- Existentzia eta bakartasunagatik hastapen-baldintzen problema horien soluzioak desberdinak dira haien artean.
- Horretaz gain, argi dago haien wronskiarra ez dela nulua.
- Gure formulazioari esker ekuazio lineal homogeneoaren n soluzio linealki independente "eraiki" dugu, baina horrelako eraikuntzen kopurua infinitua da (adibidez, 1 bakoitza $C \neq 0$ hautazko konstante batez ordezka daiteke).
- Ondorio nagusia hauxe da: n ordenako ekuazio lineal homogeneoaren n soluzio linealki independentek osaturiko multzoari oinarrizko soluzio-sistema deritzo.

Eda 3. gaia

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

3.2 teorema

n ordenako ekuazio lineal homogeneoaren n soluzio linealki independente (y_k) aukeratuz gero, beste edozein soluzio era bakarrean adieraz daiteke aipaturiko soluzio independenteen koefiziente konstanteetako konbinazio baten bidez.

- Adibidez, $y'' + \omega^2 y = 0$ ekuaziorako $\{\cos \omega x, \sin \omega x\}$ oinarrizko sistema dugu (haren wronskiarra ω da eta soluzio orokorra $y = A \cos \omega x + B \sin \omega x$ dugu, baina beste infinitu eratan eman daiteke.

3.13 ariketa

- Egiaztatu $\{1, e^x, e^{-x}\}$ multzoa $y''' - y' = 0$ ekuazioaren oinarrizko sistema dela. Aurkitu beste oinarrizko sistema bat. Idatzi soluzio orokorra bi modu desberdinetara eta egiaztatu bien arteko baliokidetasuna.
- Oinarrizko sistemaren horren wronskiarra hauxe da:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = 2.$$

Orduan ez da nulua eta sistema linealki independentea. Orain ikusi behar dugu funtzio horien hautazko konbinazio lineala ekuazioaren soluzioa dela:

$$y = A + Be^x + Ce^{-x}, \; y' = Be^x - Ce^{-x}$$

$$y'' = Be^x + Ce^{-x} = y, \; y''' = Be^x - Ce^{-x} = y'.$$

Beraz, soluzioa bada, eta $\{1, e^x, e^{-x}\}$ ekuazio horren oinarrizko sistema dela egiaztatu dugu.

- Ikuskapenaz $\{1, \sinh x, \cosh x\}$ soluzio multzoa lortzen da. Haren wronskiarra hauxe da:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & \sinh x & \cosh x \\ 0 & \cosh x & \sinh x \\ 0 & \sinh x & \cosh x \end{vmatrix} = \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Sistema berri hau eta lehengoaren arteko baliokidetasuna argi dago:

$$\sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

- Azter dezagun sakonago oinarrizko-sistemen eta ekuazio linealen arteko lotura.
- Oinarrizko sistema bakoitza ekuazio lineal homogeneo bakarrari dagokio (ekuazioan $a_0 = 1$ bada behintzat).
  - Jo dezagun n funtzioek osaturiko multzoa L_1 eta L_2 eragile linealen oinarrizko sistema dela, hau da,

$$L_1 y_k = y_k^n + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y'(x) + a_n(x) y = 0,$$

$$L_2 y_k = y_k^n + \tilde{a}_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + \tilde{a}_{n-1}(x) y'(x) + \tilde{a}_n y = 0.$$

  - Orduan multzo hori $L_1 - L_2$ eragilearen oinarrizko sistema da ere: $L_1 y_k - L_2 y_k = (L_1 - L_2) y_k = 0$.
  - Baina, $L_1 - L_2$ eragilearen ordena $n - 1$ da:

$$(L_1 - L_2) y_k = \cancel{(y_k^n - y_k^n)} + (a_1(x) - \tilde{a}_1(x)) y^{(n-1)} + \cdots +$$
$$(a_{n-1}(x) - \tilde{a}_{n-1}(x)) y'(x) + (a_n(x) - \tilde{a}_n(x)) y = 0.$$

  - Orduan $n - 1$ ordenako $L_1 - L_2$ eragile berri honek onartzen du n dimentsioko oinarrizko-sistema, eta hori ezinezkoa denez $L_1 - L_2$ eragile nulua izan behar da, hau da, $L_1 = L_2$ derrigorrez.

Eda 3. gaia

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

- Oinarrizko sistema batetik hasita, errazki eraiki daiteke dagokion ekuazioa.
  - Izan ere, sistema hura $\{y_1, \ldots, y_n\}$ bada, ekuazioaren beste edozein y soluzio horien konbinazio lineala izango da.
  - Beraz, $y_1, \ldots, y_n, y$ sistema linealki menpekoa izango da, eta orduan $W[y_1, \ldots, y_n, y] = 0$ betetzen da.
  - Hain zuzen ere $W[y_1, \ldots, y_n, y] = 0$ adierazpenak definitzen duen ekuazioa lineal homogeneoa da y ezezagunerako eta y_k soluzio independenteak onartzen digu.
  - Ekuazio horretan $y^{(n)}$ izango da deribaturik altuena eta a_0 haren koefizientea.
  - Ikus daiteke $W[y_1, \ldots, y_n] = a_0 \neq 0$ betetzen dela.
  - Ekuazio osoa a_0-rekin zatituz aipaturiko soluzio sistemak onartzen duen ekuazio lineal homogeneo normalizatu bakarra lortuko dugu.

- Adibidez, x eta x^{-1} linealki independenteak dira jatorria ez duen edozein tartetan.

  Dagokien ekuazio lineal homogeneoa hauxe da:

$$W[x,x^{-1},y] = \begin{vmatrix} x & x^{-1} & y \\ 1 & -x^{-2} & y' \\ 0 & 2x^{-3} & y'' \end{vmatrix} =$$

$$-\frac{2}{x}y'' - \frac{2}{x^2}y' + \frac{2}{x^3}y = -\frac{2}{x}\left(y'' + \frac{y'}{x}y' + \frac{y}{x^2}\right) = 0.$$

- Ekuazioa forma normalean idazteko $W[x,x^{-1}] = -2x^{-1}$ funtzioarekin zatitu behar dugu:

$$y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0$$

.

3.14 ariketa

- Aurkitu $\{x, e^x\}$ sistemari dagokion oinarrizko soluzio-sistema onartzen duen ekuazio lineal homogeneoa.
- Emaitza lortzeko ondoko wronskiarra planteatu behar dugu:

$$W[x,e^x,y] = \begin{vmatrix} x & e^x & y \\ 1 & e^x & y' \\ 0 & e^x & y'' \end{vmatrix} = xe^xy'' + e^xy - xe^xy' - e^xy'' =$$

$$e^x\left((x-1)y'' - xy' + y\right) = 0.$$

  Beraz, ekuazioa hauxe da:

$$y'' - \frac{xy'}{x-1} + \frac{y}{x-1}y,$$

  eta $x = 1$ ez daukan edozein tartean definituta dago.

Eda 3. gaia

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

- Liouville-k (eta independenteki Abel eta Ostrogradski ere) wronksiarra puntu batetik bastera nola aldatzen den adierazten duen formula aurkitu zuen:

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(u)du} \quad \forall x \in I.$$

  Formula horren azpian $a_0 = 1$ hipotesia dago.
- Gainera, exponentziala ez nulua denez, argi ikusten da W puntu batean nulua izatea nahikoa dela definizio-tarte osoan nulua izateko.

Eda 3. gaia

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

- Orokorrean ez dago ekuazio linealak ebazteko metodo zehatzik, baina soluzio partikular bat ezaguna bada lana erraztu egiten da.
- Jo dezagun y_1 dela ezagutzen dugun soluzio partikular hori. D'Alembert-en metodoaren arabera, ekuazioaren ordena beheratzen da

$$y = y_1 \int u dx$$

  aldagai aldaketa egiten bada.

- Hori ulertzeko egin dezagun ondoko eraikuntza:

$$\begin{aligned}
a_n &\{y = y_1 \int u dx\} \\
a_{n-1} &\{y' = y_1' \int u dx + y_1 u\} \\
a_{n-2} &\{y'' = y_1'' \int u dx + 2y_1' u + y_1 u'\} \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
1 &\{y^{(n)} = y_1^{(n)} \int u dx + n y_1^{(n-1)} u + \cdots + y_1 u^{(n-1)}\}
\end{aligned}$$

- Ekuazio horiek gehituz hauxe lortzen da:

$$Ly = (Ly_1) \int u dx + (a_{n-1} y_1 + a_{n-2} 2 y_1' + \cdots + n y_1^{(n-1)}) u +$$

$$(a_{n-2} y_1 + \dots) u' + \cdots + (\cdots + y_1) u^{(n-1)} = 0.$$

- Aurreko adierazpena sinplifika daiteke $Ly_1 = 0$ kontuan hartuz. Izan ere,

$$Ly = (a_{n-1} y_1 + a_{n-2} 2 y_1' + \cdots + n y_1^{(n-1)}) u +$$

$$(a_{n-2} y_1 + \dots) u' + \cdots + y_1 u^{(n-1)} =$$

$$\tilde{a}_n(x) u + \tilde{a}_{n-1}(x) u' + \cdots + y_1 u^{(n-1)} = 0.$$

- Orduan, aldagai-aldaketak murriztu du problema ordena baxuagoko ekuazio baten ebazpenera.

Eda 3. gaia

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

Soluzio partikular tipikoak

- Zer baldintza bete behar dute n ordenako ekuazio lineal homogeneo baten koefizienteek ondoko soluzio partikularra onartzeko: a) $y_1 = x$, b) $y_1 = x^2$, c) $y_1 = e^x$, d) $y_1 = e^{-x}$.
- a) $y_1 = x$ kasuan $y^{(n)} = 0 \, \forall n > 1$, orduan $Ly = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-2}y'' + a_{n-1}y' + a_n y = a_{n-1} + a_n x = 0$ eta beraz baldintza $a_{n-1} = -a_n x$ da, baina a_m koefizienteak edonolakoak izan daitezke $\forall n - 1 > m > 0$.
- b) $y_1 = x^2$ kasuan $y^{(n)} = 0 \, \forall n > 2$, orduan $Ly = 2a_{n-2} + 2a_{n-1}x + a_n x^2 = 0$ eta beraz baldintza $2(a_{n-2} + a_{n-1}x) = -a_n x$ da, baina a_m koefizienteak edonolakoak izan daitezke $\forall \, n - 2 > m > 0$.

- c) $y_1 = e^x$ kasuan $y^{(n)} = y \, \forall n > 0$, orduan $Ly = (1 + a_1(x) + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n)e^x = 0$, eta beraz baldintza $(1 + a_1(x) + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n) = 0$ dugu.
- d) $y_1 = e^{-x}$ kasuan $y^{(n)} = (-1)^n y \, \forall n > 0$, orduan $Ly = (1 - a_1(-1)^{(n-1)} + \cdots + a_{n-3}(-1)^3 + a_{n-2}(-1)^2 - a_{n-1} + a_n)e^{-x} = 0$ moduan geratzen da, eta beraz baldintza $(1 - a_1(-1)^{(n-1)} + \cdots + a_{n-3}(-1)^3 + a_{n-2}(-1)^2 - a_{n-1} + a_n) = 0$ dugu.

Eda 3. gaia

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

- Bigarren ordenako ekuazio linealaren orokorrerako, hau da, $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ ekuaziorako, d'Alembert-en metodoak eskeintzen duen formula erabilgarria honela geratzen da:

$$(a_1(x)y_1(x) + 2y_1'(x))u + y_1(x)u' = 0.$$

- Azken ekuazioa banangarria da eta berehala integratzen da:

$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{(a_1(x)y_1(x) + 2y_1'(x))}{y_1(x)} =$$

$$-\int (a_1(x) + \frac{2y_1'(x)}{y_1(x)})dx =$$

$$\ln u - \ln C_2 = -\int a_1(x)dx - \ln y_1^2.$$

- Hau da,

$$u = C_2 \frac{\exp(-\int a_1(x)dx)}{y_1^2}.$$

- Baina $y = y_1 \int u dx$ gogoratuz hauxe dugu gure soluzioa:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{\exp(-\int a_1(x)dx)}{y_1^2} dx.$$

Eda 3. gaia

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

3.17 ariketa

- Ebatzi $(x^2+1)y''-2xy'+2y=0$ ekuazioa.
- Ikuskapenaz $y=x$ soluzioa asmatzen da.
  Bestalde, ekuazioa forma normalera ekarriz hauxe dugu:

$$y''-\frac{2x}{x^2+1}y'+\frac{2}{x^2+1}y,$$

beraz, $a_1=-2x/(x^2+1)$.
Lehen lortutako formulan ordezkatuz

$$y=C_1x+C_2x\int\frac{\exp(\int\frac{2x}{x^2+1}dx)}{x^2}dx=$$

$$C_1x+C_2x\int\frac{\exp(\ln((x^2+1))}{x^2}=C_1x+C_2x\int\frac{x^2+1}{x^2}=$$

$$=C_1x+C_2(x^2-1)+C_2=C_1x+C_2x^2.$$

moduan geratzen zaigu soluzio orokorra.

- Erabil ezazu d'Alembert-en metodoa eta $y_1=e^{kx}$ besteak beste ondoko emaitza frogatzeko:

$$y''-2ky'+k^2y=0\Leftrightarrow y=C_1e^{kx}+C_2xe^{kx}.$$

- Ekuazio horretan $a_1=-2k$ beraz,

$$y=C_1e^{kx}+C_2e^{kx}\int\frac{\exp(\int 2kdx)}{e^{2kx}}dx$$

$$y=C_1e^{kx}+C_2e^{kx}\int dx=C_1e^{kx}+C_2e^{kx}\int dx.$$

Beraz,

$$y''-2ky'+k^2y=0\Rightarrow y=C_1e^{kx}+C_2xe^{kx}.$$

frogatu dugu.

Eda 3. gaia

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

- Bestalde e^{kx}, xe^{kx} oinarrizko sistema da:

$$W = \begin{vmatrix} e^{kx} & xe^{kx} \\ ke^{kx} & e^{kx} + kxe^{kx} \end{vmatrix} =$$

$$e^{kx}(e^{kx} + kxe^{kx}) - (ke^{kx})(xe^{kx}) = e^{2kx} \neq 0.$$

Zer ekuaziori dagokie?

$$W = \begin{vmatrix} e^{kx} & xe^{kx} & y \\ ke^{kx} & e^{kx} + kxe^{kx} & y' \\ k^2e^{kx} & 2ke^{kx} + k^2xe^{kx} & y'' \end{vmatrix} =$$

$$e^{2kx}(y'' - 2y'k + k^2y) = 0.$$

Eta lehen kalkulatuko 2x2 dimentsioko wronkiarraz zatituz ekuazioa forma normalean idazten dugu:

$$y'' - 2y'k + k^2y = 0$$

Beraz,

$$y'' - 2ky' + k^2y = 0 \Leftarrow y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx}.$$

frogatu dugu.

- Eta zer gertatzen da soluzio partikularrik ez bada ezagutzen?
- Orduan beste aldagai-aldaketa pare bat saia daiteke.

Eda 3. gaia

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

3.21 ariketa

- Egin $x \rightarrow \equiv \int \sqrt{Q} dx$ aldagai-aldaketa $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, eta frogatu $2PQ' + Q' = 0$ baldintza betetzen denean soluzioak aurkitzen ahalidetzen duela. Ebatzi hurrengo ekuazioa:

$$xy'' - y' + 4x^3y = 0.$$

  Bestelako zein kasutan izan daiteke baliagarria aldagai-aldaketa hau?

- Kalkula ditzagun deribatuak katearen erregelaz:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \dot{y}\sqrt{Q},$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\dot{y}\sqrt{Q}\right)\frac{dt}{dx} = \ddot{y}Q + \frac{\dot{y}}{2\sqrt{Q}}Q'.$$

  Horrekin ekuazioa honela geratzen da:

$$\ddot{y}Q + \frac{\dot{y}}{2\sqrt{Q}}Q' + P\dot{y}\sqrt{Q} + Qy = 0.$$

- Orduan $Q' + 2PQ = 0$ bada azkenik hauxe lortzen da:

$$\ddot{y} + y = 0.$$

  Bestalde

$$\frac{Q'}{2\sqrt{Q}}Q' + P\dot{y}\sqrt{Q} = CQ$$

  denean, ekuazioa

$$\ddot{y} + C\dot{y} + y = 0$$

  bihurtzen da, eta haren soluzioa “exponentzialen” bidez eman daiteke.

- Orain ebatzi behar dugu $xy'' - y' + 4x^3y = 0$ ekuazioa. Kasu honetan $P = -Q/x = 4x^2$, $2PQ = -8x$, eta $Q' = 8x$, beraz, eztabaidatzen ari garen aldagai-aldaketaz $\ddot{y} + y = 0$ bihurtzen zaigu. Beraz, soluzio orokorra $y = A\cos t + B\sin t$ da, baina $t = \int \sqrt{4x^2}dx = \int 2xdx = x^2$ erabiliz, azkenean modu honetan eman dezakegu soluzio hura:

$$y = A\cos(x^2) + B\sin(x^2).$$

Eda 3. gaia
Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

3.22 ariketa

- Ondoko aldagai-aldaketari Liouville-ren transformazio deritzo:
$$y = ue^{-\frac{1}{2}\int P(x)dx}.$$
Hura erabiliz frogatu $y'' + P(x)y' + Q(x) = 0$ ekuazioa ondoko forma normalera laburtzen dela:
$$u'' + f(x)u = 0.$$
Ondorioztatu soluzioak aurkitzen ahalbidetzen duela $f(x) \equiv (4Q - P^2 - 2P')/4$ koefizientea konstantea denean.
- Behin deribatuz hauxe lortzen dugu:
$$y' = e^{-\frac{1}{2}\int P(x)dx}\left(u' - u\,(1/2)\,P\right).$$
Aurkitu $xy'' + 2y' + xy = 0$ ekuazioaren soluzio okorra.

Eta berriro deribatuz hauxe:
$$y'' = e^{-\frac{1}{2}\int P(x)dx}(u'' - u'P + (1/4)uP^2 - (1/2)uP')$$
Guztira, honela geratzen da gure ekuazioa:
$$u'' - u\left(\frac{P^2}{4} + \frac{P'}{2} - Q\right)u = 0.$$

- Orain $xy'' + 2y' + xy = 0$ ebatzi behar dugu.
Kasu honetan $P = 2/x$, $P' = -2/x^2$ eta $Q = 1$, orduan $P^2/4 + P'/2 - Q = 1/x^2 - 1/x^2 - 1 = -1$, beraz $f(x) = 1$ eta ekuazioa aldaketa horrekin $u'' + u = 0$ bihurtzen zaigu ekuazioa.
Argi dago $u = A\cos x + B\sin x$ dugula soluzio orokorra, beraz, guztira
$$y = ue^{-\frac{1}{2}\int P(x)dx} = ue^{-\frac{1}{2}\int(2/x)dx} =$$
$$\frac{u}{x} = \frac{1}{x}\left(A\cos x + B\sin x\right).$$

Eda 3. gaia

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

3.8 Ekuazio lineal osoak

- Lineartasunagatik ondokoak betetzen dira:
  - $Ly_1 = b_1, \quad Ly_2 = b_2 \Rightarrow L(a_1 y_1 + a_2 y_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2,$
  - $Ly_1 = 0, \quad Ly_2 = b \Rightarrow L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2 = b,$
  - $Ly_1 = Ly_2 = b \Rightarrow L(y_1 - y_2) = Ly_1 - Ly_2 = 0.$
- Ondorioz, ekuazio lineal osoaren soluzio orokorra dagokion homogeneoaren soluzio orokorra eta osoaren edozein soluzio partikular batuz lortzen da.

- Hortaz, ekuazio lineal osoa ondoko bi urratsetan ebazten da:
  - Aurkitu homogeneoaren n soluzio linealki independente eta eraiki soluzio orokorra haien bidez:

$$Ly = 0 \Leftrightarrow y = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k.$$

  - Aurkitu ekuazio osoaren soluzio partikular bat:

$$Ly_p = b.$$

- Ekuazio osoaren soluzio orokorra $y = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k + y_p$ izango da:

$$Ly_p = b \Leftrightarrow y = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k + y_p.$$

Eda 3. gaia
Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

- Adibidez, kontsidera dezagun $y''' - y' = 1$ ekuazio lineal osoa.
  - 3.13 ariketan ikusi genien horri dagokion ekuazio homogeneoaren soluzio orokorra $y = A + Be^x + Ce^{-x}$ dela.
  - Kasu honetan osoaren soluzio partikularra $y = -x$ dela ikuskapenaz ondorioztzatzen da.
  - Orduan, soluzio orokorra hauxe da:

$$y = A + Be^x + Ce^{-x} - x.$$

3.23 ariketa

- Aurkitu ondokoaren soluzio orokorra: $y'' + y = 0$.
- Nahiko ezaguna denez, homogenoaren soluzio orokorra $y = A\cos x + B\sin x$ da.
- Bestalde, ikuskpanez $y_p = x$ soluzio partikularra aurki daiteke.
- Orduan, ekuazio osoaren soluzio orokorra $y = A\cos x + B\sin x + x$ da.

Eda 3. gaia

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

- Soluzio orokorraren ebazpenean pausorik zailena soluzio partikularra topatzea da.
- Badaude hori egiteko metodo sistematikoak eta horietako bat aztertuko dugu.

Eda 3. gaia

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

Konstanteen aldakuntzaren metodoa

- Jo dezagun ekuazio lineal homogeneo baten $\sum_{k=1}^{n} C_k y_k$ soluzio orokorra ezaguna dela.
- Osoaren soluzio partikularra $y_p = \sum_{k=1}^{n} g_k(x) y_k$ modukoa dela joko dugu eta $g_k(x)$ zehaztutko ditugu ondoren deskribatuko dugun metodoaz.
- Hasteko, ondoko erlazioak bete daitezela eskatuko joko dugu:

$$
\begin{array}{ccccccc}
g_1' y_1 & + & g_2' y_2 & + \dots + & g_n' y_n & = & \sum_{k=1}^{n} g_k' y_k = 0 \\
g_1' y_1' & + & g_2' y_2' & + \dots + & g_n' y_n' & = & \sum_{k=1}^{n} g_k' y_k' = 0 \\
\vdots & & \vdots & \ddots + & \vdots & & \vdots \\
g_1' y_1^{(n-2)} & + & g_2' y_2^{(n-2)} & + \dots + & g_n' y_n^{(n-2)} & = & \sum_{k=1}^{n} g_k' y_k^{(n-2)} = 0 \\
g_1' y_1^{(n-1)} & + & g_2' y_2^{(n-1)} & + \dots + & g_n' y_n^{(n-1)} & = & \sum_{k=1}^{n} g_k' y_k^{(n-1)} = b
\end{array}
$$

- Baldintza horiek erabiliz ondoko eraikuntza egin dezakegu:

$$
\begin{array}{llllll}
a_n & \{y_p & = & \sum_{k=1}^n g_k y_k & & \} \\
a_{n-1} & \{y_p' & = & \sum_{k=1}^n g_k y_k' & + & [\sum_{k=1}^n g_k' y_k = 0] \quad \} \\
a_{n-2} & \{y_p'' & = & \sum_{k=1}^n g_k y_k'' & + & [\sum_{k=1}^n g_k' y_k' = 0] \quad \} \\
\vdots & & \vdots & & & \\
a_1 & \{y_p^{(n-1)} & = & \sum_{k=1}^n g_k y_k^{(n-1)} & + & \left[\sum_{k=1}^n g_k' y_k^{(n-2)} = 0\right] \} \\
1 & \{y_p^{(n)} & = & \sum_{k=1}^n g_k' y_k(n) & + & \left[\sum_{k=1}^n g_k' y_k^{(n-1)} = b\right] \}
\end{array}
$$

- Gai guztiak batuz hauxe lortzen dugu:

$$Ly_p = \sum_{k=1}^{n} g_k L y_k + b,$$

eta y_k funtzioak soluzioak direnez $Ly_p = b$ geratzen zaigu eta $y_p = \sum_{k=1}^n g_k(x) y_k$ eraikuntza soluzio partikular oinargarria dugu.

- Bestalde $g_k(x)$ funtzioen gainean ezarritako baldintzek sistema lineal bat osatzen dute.
  - Haien determinantea, homogenoaren y_k soluzioen wronskiarra da.
  - Wronksiar hori ez nulua denez sistemaren soluzioa ez da tribiala eta gainera bakarra da:

$$g_k'(x) = f(x) \Rightarrow g_k(x) = \int f_k(x) dx + C_k.$$

- Beraz, ondoko soluzioa lortzen da:

$$y_p = \sum_{k=1}^{n} \left(\int f_k(x) dx \right) y_k + \sum_{k=1}^{n} C_k y_k,$$

eta n konstante aske dituenez, egiatan ekuazio osoaren soluzio orokorra da.

Eda 3. gaia
Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak

- Adibide moduan, azter dezagun berriro $y'' - y = 0$ ekuazioa.
  - Badakigu homogeneoaren soluzioa $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ dela.
  - Froga dezagun, beraz, $y_p = g(x)e^x + h(x)e^{-x}$ moduko partikularra.
  - Kasu honetan planteatu behar ditugu erlazio hauek:

$$g' y_1 + h' y_2 = 0, \qquad g' y_1' + h' y_2' = b.$$

  - Hau da, $\quad g' e^x + h' e^x = 0, \qquad g' e^x - h' e^x = x^2.$
- Errazki ondorioztatzen da $g' = x^2 e^{-x}/2$ eta $h' = -x^2 e^x/2$ direla, orduan

$$g = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 2)e^{-x}/2 + C_1,$$

$$h = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 2)e^x + C_2,$$

betetzen da eta soluzio orokorra hauxe dugu:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x^2 - 2.$$

3.24 ariketa

- Aurkitu $y'' + y = 1/\cos x$ ekuazioaren soluzio orokorra.
- Homogeneoaren soluzio orokorra $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ denez hauxe planteatu behar dugu:
  Hau da,
  $g' \cos x + h' \sin x = 0, \quad -g' \sin x + h' \cos x = 1/\cos x.$
  Modu honetan ere idaz ditzakegu erlazioak:

$$g' \cos x \sin x + h' \sin^2 x = 0,$$

$$-g' \cos x \sin x + h' \cos x^2 = 1.$$

  Horiek gehituz $h' = 1$ lortzen da, beraz, $g' = -\tan x$, eta $h = x + C_1$, $g = \log(\cos x) + C_2$.
  Guztira osoaren soluzio orokorra honela geratzen da:

$$y = (\log(\cos x) + C_2)\cos x + (x + C_1)\sin x.$$

Eda 3. gaia

Goi-ordenako ekuazioak
3.1 Esangura geometrikoa
3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema
3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna
3.4 Ordena-beheratzea
3.5 Funtzioen menpekotasun lineala
3.6 Ekuazio diferentzial linealak
3.7 Ekuazio lineal homogeneoak
3.8 Ekuazio lineal osoak