Ekuazio diferentzial arruntak
2. gaia

Lehen ordenako ekuazioak

2.1 Esangura geometrikoa, 2.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema, 2.3 Ekuazio zehatzak, 2.4 Faktore integratzailea, 2.5 Ekuazio banangarriak, 2.6 Faktore integratzailea bereziak, 2.7 Ekuazio linealak, 2.8 Transformazio-metodoak, 2.9 Ekuazio homogeneoak, 2.10 $y' = f(ax + by + c)$ egiturako ekuazioak, 2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak, 2.12 Bernouilli-ren ekuazioak, 2.13 Riccati-ren ekuazioak, 2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak, 2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak

2.1 Esangura geometrikoa

- Badakigu $\varphi(x, y) = 0$ ekuazio finituak kurba bat definitzen duela (x, y) planoan
  - adb. $x^2 + y^2 = 1$ ekuazioak jatorrian zentraturiko zirkunferentziaren ekuazioa da
- Baina kurba-familia bat adierazteko $\varphi(x, y, C) = 0$ moduko zerbait behar dugu.
  - adb. $x^2 + y^2 = C^2$ ekuazioak jatorrian zentraturiko eta $C(\geq 0)$ erradioko zirkunferentzia-familiaren ekuazioa da
- Baina zergatik arduratzen gara kurbetaz ekuazio diferentzialen kurtso batean?

- Familiaren ekuazioa

$$\varphi(x, y, C) = 0$$

eta haren deribatua

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y, C) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y, C)y' = 0,$$

konbinatuz, C parametroa desagertarazi daiteke.

  - Hau da, kurba-familien eta ekuazio diferentzialen arteko erlazioa estua da.

- Konbinaketa horren emaitza familiaren ekuazio diferentziala dugu:

$$F(x, y, y') = 0.$$

  - Ekuazio horrek puntu bakoitzaren malda eta bertatik igarotzen diren kurben arteko erlazioa ematen du.

2.1 ariketa

- Deribatu $x^2 + y^2 = C^2$ ekuazioa, jatorrian zentraturiko zirkunferentzien ekuazio diferentziala hauxe dela ikusteko:

$$x + yy' = 0.$$

- $(x^2 + y^2)' = (C^2)'$ eginez $x + yy' = 0$ dugula ikusten da berehala.
  Hori da, hain zuzen ere, bilatutako emaitza.

- Kasu hau bereziki erreza izan da, deribatua nahikoa da ekuazioa lortzeko, baina orokorrean ekuazio biak beharko dira.

Lehen ordenako ekuazioak
2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y' = f(ax + by + c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

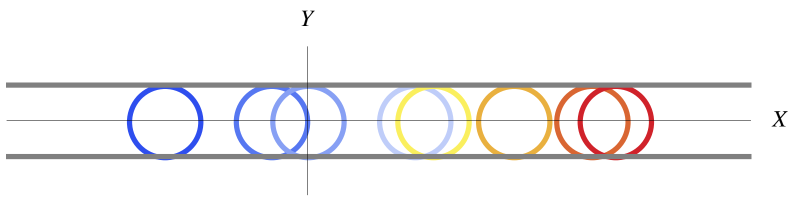
- Eraikuntzagatik $\varphi(x,y,C)=0$ funtzioak $F(x,y,y')=0$ ekuazioaren soluzio-familia uniparametrikoak dira
  - Gainera, ekuazio diferentziala lehen ordenakoa denez soluzio hura soluzio orokorra da hain zuzen ere.
- Kontuz! C desagertaraztean bestelako soluzio orokorrak eta singularrak sar daitezke.
- Bestalde, $\varphi(x,y,C)=0$ adierazpenaren kasu partikular bakoitza kurba integral baten ekuazioa da.
  - Kurba integralak familiaren ekuazio diferentziala integratuz lortzen diren soluzio partikularrak dira.
  - adb. $x^2+y^2=C^2$ ekuazioak definitzen dituen zirkunferentziak kurba integralak dira.

2.2 ariketa

- Aurkitu zentrua abszisa-ardatzean izanik unitate-erradioa duten zirkunferentzien ekuazio diferentziala. Ba al dago soluzio singularrik?
- Kurba-familia horren ekuazio finitua ondokoa da:

$$(x-C)^2+y^2=1,$$

eta deribazioa eta beste eragiketa simpleez $yy'=-(x-C)$ lortzen da.
Baina aurreko adierazpena $y^2(y')^2=(x-C)^2$ moduan idaz daiteke ere.
Bukatzeko, C desagertarazten da ekuazio finituaz azkenean $y^2((y')^2+1)=1$ lortzeko.
- Ikuskapenaz $y=\pm 1$ soluzio singularrak asmatzen dira.



Soluzio partikularrak (zirkuluak) eta singularrak (zuzenak).

Eda 2. gaia

Lehen ordenako ekuazioak

2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y' = f(ax+by+c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

- Familiako kurbek elkar ebakitzen ez badute oso kasu interesgarria dugu: kurba-kongruentzia
  - Kurba-kongruentziak dira aurreko ariketetan aztertutako zirkunferentzien familiak?
    2.1 ariketakoa bai, baina 2.2 ariketakoa ez.
- Kurba-kongruentzien kasuan, puntu bakoitzari bertatik pasatzen den kurba bakarra dagokio (eta baita ere kurba horrek zehazten duen parametroaren balioa).
  - Hau da, (x, y) puntu bakoitzari (kurba, C-ren balioa) bikote zehatz eta bakarra dagokio.
- Hori dela eta, $\varphi(x, y, C) = 0$ erabiliz, printzipioz posiblea da C askatzea (x, y) puntu bakoitzarekin loturiko balioa kalkulatzeko.
  - Hori eginez
    $$u(x, y) = C$$
    moduan adierazi ahal izango dugu kurba-kongruentzia.
  - Gogoratu lehen aztertutako $x^2 + y^2 = C^2$ adibidea.

- Kongruentzietarako, ekuazio diferentziala diferentziazio hutsez lortzen da:
  $$(u(x, y) = C)'$$
  $$u'(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)y' = C' = 0$$
  - Diferentziazioak berak parametroa ezabatzen du.
- Ekuazioaren forma simetriko deritzona dx-ekin biderkatzen lortzen da:
  $$u' dx = \frac{du}{dx}dx = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0.$$
- Laburtzeko,hemendik aurrera zera jarriko dugu:
  $$P \equiv \frac{\partial u}{\partial x}, \; Q \equiv \frac{\partial u}{\partial y},$$
  $$du = Pdx + Qdy.$$
- adb. $x + yy' = 0$ ekuaziorako hauxe dugu:
  $$P \equiv \partial u/\partial x = x, \; Q \equiv \partial u/\partial y = y, \; xdx + ydy = 0.$$

- Ordena altueneko deribatua askatuz lortzen da forma normal deritzona:

$$y' = f(x, y)$$

- Batzutan forma normala forma simetrikoa baino komenigarriagoa da.
- Dena den haien arteko lotura estua da:

$$f(x,y) \equiv -\frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial y} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

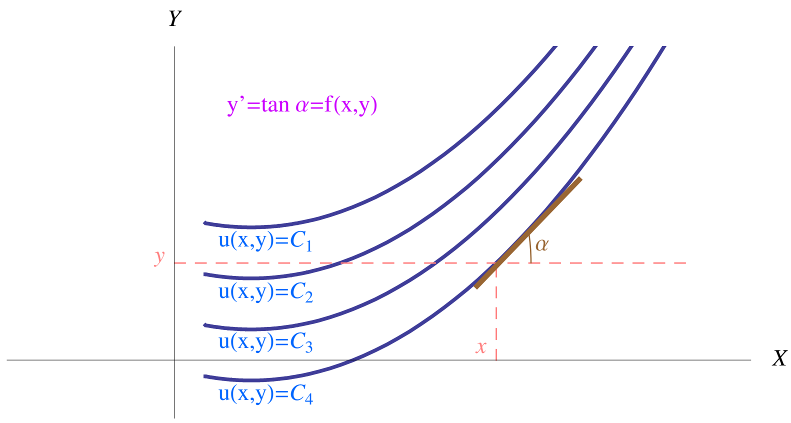
  - Aurreko adibiderako forma normala hauxe da:

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Eda 2. gaia

Lehen ordenako ekuazioak

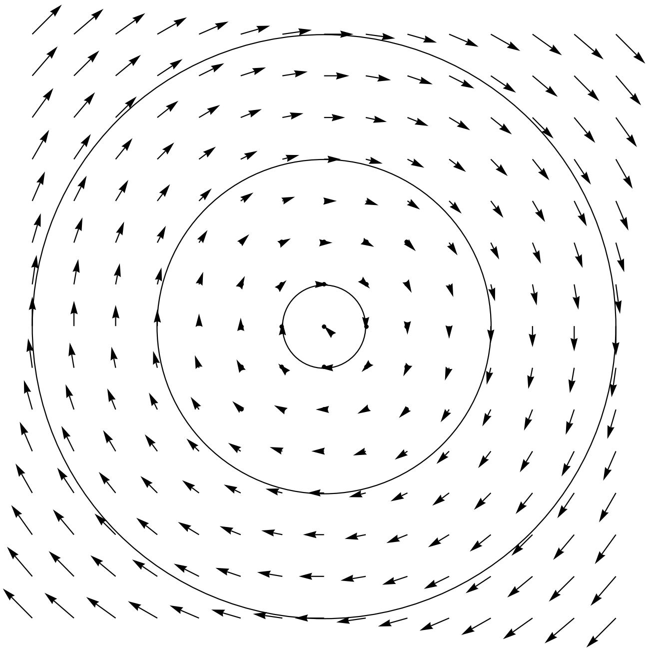
2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y' = f(ax+by+c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa



2.1 IRUDIA Kurba-kongruentzia, deribatua, eta tangentearen malda.

- Forma normalak ekuazio diferentzialaren interpretazioa ematen du:
  - ekuazio diferentzialak (x, y) puntutik igarotzen den kurba integralak bertan duen tangentearen malda ematen du
  - malda horren balioa $y' = \tan\alpha = f(x, y)$ da
  - puntu bakoitzetik kurba bakarra igarotzen da eta haren tangenteak norabide bat definitzen du

- Beraz, $y' = f(x, y)$ ekuazio diferentzialak puntu bakoitzari egokitzen dio norabide bat
  - Puntu guztiak hartuta norabide-eremu bat definitzen du.



2.2 IRUDIA Kongruentzia eta norabide-eremua.

- Noiz da bana-banakoa (forma normalean) idatzitako ekuazio eta kongruentzien artean?
- Existentzia eta bakartasunaren teoremak ezarritako baldintzak betetzen direnean.

2.1 teorema (existentzia eta bakartasuna)

Eremu batean f funtzioa eta $\partial f/\partial y$ deribatua jarraituak badira

$$y' = f(x, y), \; y(x_0) = y_0$$

hastapen baldintzen problemak soluzio bat eta soilik bat dauka eremu horretarako (x_0, y_0) hastapen baldintza bakoitzeko.

Eda 2. gaia

Lehen ordenako ekuazioak

2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y' = f(ax + by + c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

- Teorema hura dela eta, jarraitasun-baldintza egoki bat betetzen bada ekuazioa integratuz lortzen den kurba-familia kongruentzia da.
- Baina, puntu bat singularra bada ezin zaio teorema aplikatu.
- Horrelako puntuetatik kurba bat baino gehiago igaro daiteke

2.4 ariketa

- Froga ezazu zentrua ordenatu-ardatzean izanik absiza-ardatza ukitzen duten zirkunferentzien ekuazio diferentziala ondokoa dela:

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

- Zentrua y ardatzean duten zirkunferentzien ekuazioa $x^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ da.
  Orain ezarri behar dugu $(x, y) = (0, 0)$ puntua zirkunferentzietakoa izatea,
  beraz $0^2 + (0 - y_0)^2 = R^2$, eta orduan $y_0 = \pm R$ beharrezkoa da.
  Horrek gure zirkunferentzien familiaren ekuazio finitua ematen digu:

$$x^2 + (y \mp R)^2 = R^2.$$

Eda 2. gaia

Lehen ordenako ekuazioak
2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y' = f(ax+by+c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

- Aurreko adierazpena $x^2 + y^2 \pm 2Ry = 0$ modura idatzi daiteke, eta hortik $\pm R = (x^2 + y^2)/(2y)$ lortzen da. Bestalde, ekuazio finitua deribatuz eta sinplifikatuz

$$x + (y \pm R)y' = 0$$

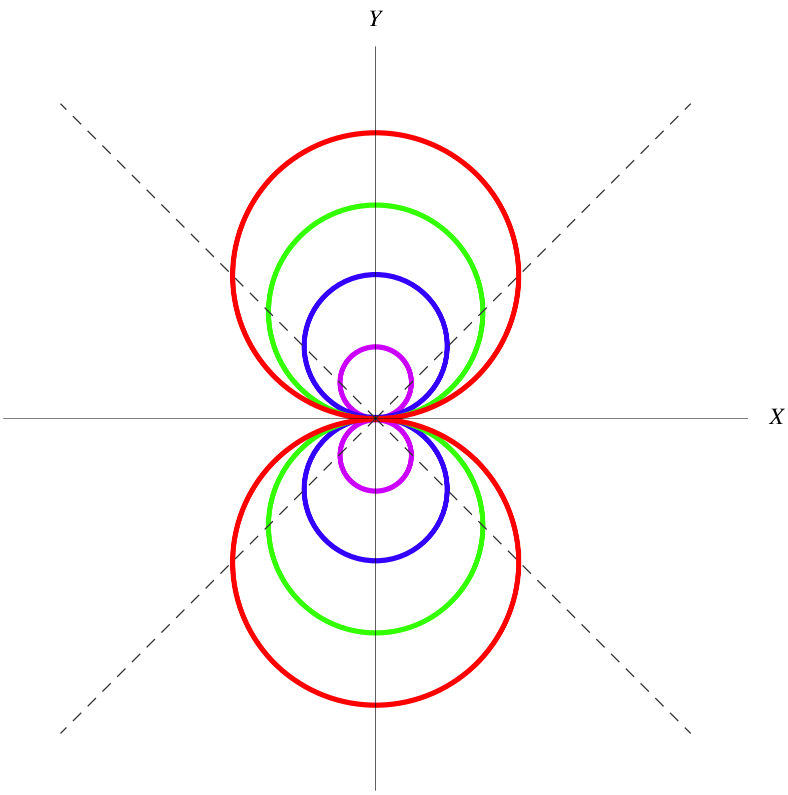
lortzen da.
Azken emaitza, lehenago $\pm R$-rako lortu dugun emaitzarekin konbinatuz eta y-rekin biderkatuz $x^2 + (y^2 - (y^2 - x^2)/(2y))y' = 0$ lortzen da eta dena ordenatuz

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2},$$

ondorioztatzen da.

Eda 2. gaia

Lehen ordenako ekuazioak
2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y' = f(ax + by + c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa



2.3 IRUDIA Abszisa-ardatza ukitzen duten zirkunferentziak.

- $y = \pm x$ erdikariak eta bereziki $(x, y) = (0, 0)$ puntua singularrak dira.
- Jatorrian bakartasunik ez bada betetzen ere, ez goaz teoremaren kontra.
- Bestalde, erdikarietan ez dago bakartasunerako problemarik.

2.3 Ekuazio zehatzak

- Gogora dezagun $u(x, y) = C$ ekuazioaren forma simetrikoa:

  $$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = (\partial u/\partial x)dx + (\partial u/\partial y)dy.$$

- Horrelako adierazpena funtzio baten deribatua balitz, ekuazioa zehatza izango litzateke.

2.2 teorema

Schwarzen teoremaren ondorioz , ekuazio zehatz guztiek ondoko erlazioa betetzen dute:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Aplikazio fisikoa

- Eremu eskalar baten potentziala $V = -u$ funtzioa dela jotzen badugu, $u = -V = -C$ lerro ekipotentzialen multzoa kongruentzia da.
  - Kongruentziaren ekuazioa $dV = -du = 0$ da.
- Bestalde, $\vec{E} = -\vec{\nabla} V = P\hat{i} + Q\hat{j}$ eremu bektoriala kongruentziaren lerroen ortogonala da, zeren $\vec{E} \cdot \vec{d}r = Pdx + Qdy = 0 = -dV = du$
  - Gainera, testu-inguru horretan $\vec{\nabla} \times E = 0$ da.

Adibidea: ekuazio zehatz baten integrazioa

- Gure abiapuntua ondoko ekuazioa da:

$$xdx + ydy = 0$$

- Zehatza da $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ betetzen baita.
- Kontuan izanik $\partial u/\partial x = x$ dela, eta hura integratuz

$$u = x^2/2 + h(y)$$

lortzen dugu ($h(y)$ zehaztugabea da oraingoz eta berriro deribatuz $\partial u/\partial x = x$ lortzen da, noski).
- Orain har dezakegu kontuan $\partial u/\partial y = y$ dela, baina beste aldetik $\partial u/\partial y = h'(y)$.
- Konparatuz eta integratuz $h(y) = y^2/2 + D$ lortzen dugu, eta beraz

$$u = x^2/2 + y^2/2 + D = C$$

moduan idaz dezakegu ekuazioaren soluzio orokorra.
- Apainduago uzteko gure emaitza $D = 0$ aukeratu ahal dezakegu.

Eda 2. gaia

Lehen ordenako ekuazioak
2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y' = f(ax + by + c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

2.5 ariketa

- Ebatzi ondoko ekuazioa:

$$(x+y+1)dx+(x-y^2+3)dy=0.$$

- Kasu honetan $\partial P/\partial y = 1$ eta $\partial Q/\partial x = 1$, orduan ekuazioa zehatza da.
  Orain $\partial u/\partial x = (x+y+1)$ denez,
  $u = x^2/2 + x(y+1) + h(y)$ lortzen da.
  Horrek $\partial u/\partial y = x + h'(y)$ ematen digu,
  eta $Q = \partial u/\partial y = x - y^2 + 3$ erabiliz eta konparatuz
  $h'(y) = 3 - y^2$ lortzen da.
  Horrek, berriz, $h(y) = 3y - y^3/3$ ematen du eta guztia kontuan hartuz

$$u=\frac{x^2}{2}+x(y+1)+y(3-\frac{y^2}{3})=C$$

  emaitza lortzen dugu.

1. kasu berezia: Menpeko aldagai gabeko ekuazioak

- Ondoko itxura dute:

$$y'=f(x).$$

- Deribatu gurutxatu biak nuluak dira eta beraz berdintasuna betezen da, hau da, ekuazioa zehatza da.
- Argi eta garbi

$$y=\int f(x)dx+C.$$

Eda 2. gaia

Lehen ordenako ekuazioak
2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y' = f(ax+by+c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

- Adibide modura integra dezagun $y^2((y')^2+1)=1$ ekuazioa.
- Hura modu honetara idatzi daiteke: $(y')^2 = 1/y^2 - 1$, edota beste modu honetara $(y^2(y')^2)/1-y^2 = 1$.
- Karratua hartuz eta $y' = dy/dx$ gogoratuz $\dfrac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = \pm dx$ idatz dezakegu eta bukatzeko integrazio hutsez $\sqrt{1-y^2} = \pm(x-C)$ lortzen da.

2. kasu berezia: Aldagai bananduetako ekuazioak

- Kasu hauetan aldagai independentea eta menpeko aldagai gai ezberdinetan banandurik agertzen dira:

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0.$$

- Ekuazioa zehatza da zeren deribatu gurutxatu biak nuluak diren (eta beraz berdinak).
- Argi eta garbi

$$y = \int P(x)dx + \int Q(y)dy + C.$$

Eda 2. gaia

Lehen ordenako ekuazioak
2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y' = f(ax+by+c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

2.7 ariketa

- Ebatzi $(1+y)e^y y' = 2x$.
- Forma simetrikoan $(1+y)e^y dy - 2xdx = 0$ dugu, eta gure 2. kasu bereziko ekuazioa dugu, beraz $u = \int (1+y)e^y dy - \int 2xdx = ye^y - x^2 = C$

Prozedura orokorra

$$du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

ekuazioa zehatza bada, haren soluzio orokorra lortzeko

- 1. Kalkulatu $\int P(x,y)dx$ zeren $u(x,y) = \int P(x,y)dx + h(y)$ den.
- 2. Planteatu
$$\frac{d[\int P(x,y)dx]}{dy} + h'(y) = Q(x,y)$$
eta $h'(y)$ askatu.
- 3. Integrazioz kalkulatu $h(y)$

Eda 2. gaia

Lehen ordenako ekuazioak
2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y' = f(ax+by+c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

2.4 Faktore integratzailea

- Ikus dezagun adibide erakusgarri bat:

$$\frac{x}{y}dx + dy = 0.$$

  - Ekuazio hura ez da zehatza, baina y-rekin biderkatu ostean zehatz bihurtzen da.
- Kasu batzutan posiblea da zehatzak ez diren ekuazioak zehatz bihurtu.
- Zehatza ez den $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ ekuazioa $\mu(x,y)$-kin biderkatuta zehatz bihurtzen bada, $\mu(x,y)$ funtzioa hasierako ekuazio horren faktore integratzailea dela esango dugu.
- Orokorrean $\mu(x,y)(P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = 0$ ekuazio berriaren soluzioak $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ ekuazioaren soluzioak ere izango dira.

1. salbuespena

- Kontsidera dezagun $xydx + y^2dy = 0$ ekuazioa

  Ekuazio honek onartzen du $y = 0$ soluzio singularra.
  Bestalde, $\mu = 1/y$ faktore biderkatzailea onartzen du.
  Baina $\mu(P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = xdx + ydy = 0$ ekuazio berriak ez du onartzen $y = 0$ soluzioa: soluzio bat galdu da!
  Adibide honetan galdu dugu soluzioa ($y = 0$) ikus daiteke $1/\mu$ funtzioaren erroa dela.

Eda 2. gaia
Lehen ordenako ekuazioak
2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y' = f(ax + by + c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

- Orokorrean faktoreen integrailearen alderantzizkoak izan ditzakeen erroak, hau da, $1/\mu(x,y) = 0$ ekuazioaren soluzioak, aztertu behar dira.

  Halako soluzioak existitzen badira eta $\mu(P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = 0$ ekuazioaren soluzio orokorraren barne ez badaude, orduan benetan ebatzi nahi dugun $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ ekuazioaren soluzio singularrak dira.

2. salbuespena

- Faktore integratzaileak soluzioak "gehi ditzake artifizialki".

  $\mu(x,y) = 0$ moduko adierazpenek $\mu(P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = 0$ ekuazioa berriaren soluzioak deskribatzen dituzte.
  Baina gerta liteke soluzio horiek jatorrizko soluzioaren benetako soluzioak ez izatea.
  Orduan hori konprobatu beharko da.
- Laburki
  - $\mu(x,y) = 0$ bada benetakoak ez diren soluzioak ager daitezke.
  - $1/\mu(x,y) = 0$ bada benetakoak diren soluzioak desager daitezke.

Eda 2. gaia

Lehen ordenako ekuazioak

2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y' = f(ax + by + c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

2.8 ariketa

- Egiaztatu $\mu = 1/(xy^2)$ ondoko ekuaziorako faktore integratzaile onargarria dela: $(xy + y^2)dx - x^2dy = 0$. Kalkulatu soluzio orokorra. Ba al dago soluzio singularrik? Eta ekuazio diferentziala betetzen ez duen μ-ren errorik?
- Hasteko zera dugu:

$$\mu P = \frac{1}{xy^2}(xy + y^2) = \frac{1}{y} + \frac{1}{x}, \qquad \mu Q = -\frac{x^2}{xy^2} = -\frac{x}{y^2}$$

Berehala ikusten da $\partial(\mu P)/\partial y = -1/y^2 = \partial(\mu Q)/\partial x$, dugula orduan ekuazio berria zehatza da.
Orain kasu $\partial u/\partial x = \mu P = 1/y + 1/x$ dugula erabiliz, $u = x/y + \log|x| + h(y)$ lortzen da.
Bestalde, $\partial u/\partial y = \mu Q = -x/y^2$ alde batetik, baina bestetik $\partial u/\partial y = -x/y^2 + h'(y)$.
Orduan $h(y) = C$ eta $u = x/y + \log|x| = C$.

- Orain aztertu behar ditugu $\mu = 0$ eta $1/\mu$.
- Lehenengoa $y = \infty$ lekuan ez da gertatzen, beraz ez da kezkagarria (soluzio onartezina).
- Bigarrena $y = 0$ denean lortzen da.
- Soluzio orokorrean $x/y + \log|x| = C = 1/D$ da, eta

$$y = \frac{Dx}{1 - D\log|x|}$$

askapena egin daiteke.
- Aurrekoan $D = 0$ aukerarako $y = 0$ berreskuratzen da eta orduan ikusten dugu ez dela soluziorik galdu.

Eda 2. gaia

Lehen ordenako ekuazioak
2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y' = f(ax + by + c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

- Ekuazio batek μ faktore integratzailea onartzen badu $C\mu$ faktorea onartzen du ere, C edozein konstante izanik.
- Lehen ordenako ekuazio diferentzial orok onartzen dute faktore integratzaileren bat.
  - Baina...nola kalkula daiteke orokorrean?
- Kasu batzutan faktore integratzailea kalkulua daiteke metodikoki.
  - Ekuazio berria zehatza bada

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

    bete behar da
  - Baldintza horren ondorioa

$$Q\frac{\partial \log \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \log \mu}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$$

    baldintza berria dugu, eta nahiko erabilgarria da.

2.5 Ekuazio banangarriak

- Forma simetrikoan menpeko aldagaia eta aldagai independentea faktore ezberdinetan bildu ahal badira, ekuazioa banangarria da:

$$R(x)S(y)dx + U(x)V(y) = 0.$$

- Kasu honek $1/(S(y)U(x))$ faktore integratzailea onartzen du:

$$\frac{1}{S(y)U(x)}(R(x)S(y)dx + U(x)V(y)) =$$

$$\frac{R(x)}{U(x)}dx + \frac{V(y)}{S(y)}dy = 0.$$

- Faktore horrek aldagaiak banatzen dituenez, soluzioa hau da:

$$u = \int \frac{R(x)}{U(x)}dx + \int \frac{V(y)}{S(y)}dy = C$$

- Kasu honetan $1/\mu = S(y)U(x)$ denez, faktorearekin biderkatzean $S(y) = 0$ soluzio posibleak gal litezke.
- Baina kontuz! $U(x) = 0$ ez dugu aztertu behar:

  horrelako adierazpen batek ez duenez menpeko aldagaiaren balioak finkatzen ez da lehen ordenako ekuazio diferentzial baten soluzioa.

- Adibide modura ikus dezagun $x(1+y)y' = y$ ekuazioak $\mu = 1/(xy)$ faktore integratzailea onartzen duela eta lor dezagun haren soluzio orokorra.
- Forma simetrikoan $-ydx + x(1+y)dy = 0$, dugu eta beraz

  $R(x) = -1, \quad S(y) = y, \quad U(x) = x, \quad V(y) = (1+y)$
  $\mu = 1/(SU) = 1/(xy)$.
- Orduan gure ekuazio berria hau da:

$$-\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}(1+y)dy = 0.$$

- Integrazio zuzenez soluzio orokorra $\ln|y| + y = \ln|x| + \ln C$ modura edo

$$|y|e^y = C|x|$$

  modura adieraz daiteke.
- Printzipioz $y = 0$ soluzio galduta egon liteke, baina hori ez da gertatzen zeren soluzio orokorraren $C = 0$ kasuan berreskuratzen baita.

Eda 2. gaia

Lehen ordenako ekuazioak
2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y' = f(ax + by + c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

2.9 ariketa

- Ebatzi ondoko ekuazioa:

$$(x-4)y^4dx - x^3(y^2-3)dy = 0.$$

- Kasu honetan
  $R(x) = x-4,\ S(y) = y^4,\ U(x) = -x^3,\ V(y) = y^3-3,$
  $\mu = 1/(SU) = -1/(x^3y^4).$
- Ekuazio berria $-((x-4)/x^3)dx + ((y^2-3)/y^4)dy$ dugu.
- Beraz, azkenean

$$u = -\int (x-4)/x^3dx + \int (y^2-3)/y^4dy =$$

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{y^3} = C = 1/D$$

- Bestalde $y=0$ soluzioek $1/\mu = U(x)S(y) = 0$ egiten dutenez galduta egon litezke, baina soluzio orokorrean $D=0$ hartuz berreskuratzen direnez ez dira galdu.

2.6 Faktore integratzaile bereziak

1. kasua: $\mu(x)$ moduko faktore integratzailea

- Orokorrean faktore integratzaileak ondoko ekuazioa betetzen du:

$$Q\frac{\partial \log \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \log \mu}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$$

- Baina $\mu(x)$ onargarria izan dadin, baldintza sinpleagoa behar da:

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial x} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

- Hori egia bada, ondoko ondorioa dugu:

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right] = 0$$

  eta hori da egin behar dugun proba.

Eda 2. gaia

Lehen ordenako ekuazioak
2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y' = f(ax+by+c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

- Orduan
$$\frac{\partial \log \mu}{\partial x} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$
integratuz
$$\mu(x) = C\exp \int \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx$$
lortzen da.
- C balioa erosoen gertatzen zaigun modura aukera daiteke.

- Adibidez, kontsidera dezagun $(2x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0$ ekuazioa.
- Kasu honetan
$$\frac{d}{dy}\left[\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right] =$$
$$\frac{d}{dy}\left[\frac{1}{x^2y - x}(1 - (2xy - 1))\right] = \frac{d}{dy}\left[\frac{2 - 2xy}{x^2y - x}\right] =$$
$$\frac{d}{dy}\left[-\frac{2}{x}\right] = 0$$
- Orduan $\mu(x)$ moduko faktore integratzailea onargarria da, hain zuzen ere
$$\mu(x) = C\exp \int \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx =$$
$$C\exp \int -\frac{2}{x} dx = C\exp(-2\ln x) = \frac{1}{x^2}.$$

Eda 2. gaia

Lehen ordenako ekuazioak
2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y' = f(ax + by + c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

- Ekuazio berria, beraz, ondokoa da:

$$\left(2+\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(y-\frac{1}{x}\right)dy=0$$

- Ohiko pausoak emanez

  $u=2x-y/x+h(y)$ alde batetik,
  eta bestetik

$$-\frac{1}{x}+h'(y)=y-\frac{1}{x},$$

  beraz, $h(y)=y^2/2$.
- Guztira,

$$u=2x-\frac{y}{x}+\frac{y^2}{2}=C.$$

  lortzen dugu

2.10 ariketa

- Askatu $(3xy+y^2)+(x^2+xy)y'=0$ ekuazioa.
- Kasu honetan

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right]=$$

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{1}{x^2+xy}(x+y)\right]=\frac{d}{dy}\left[\frac{1}{x}\right]=0.$$

  Beraz

$$\mu(x)=C\exp\int\frac{dx}{x}=Cx,$$

  eta ekuazio berria $xy(3x+y)dx+x^2(x+y)dy=0$ dugu.

- Ohiko prozedurak

$$u = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + h(y)$$

ematen digu hasteko.
Horretaz gain,

$$x^3 + x^2y + h'(y) = x^2(x+y)$$

dugu, eta beraz $h(y) = D$.
Guztira,

$$u = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} = C.$$

2. kasua: $\mu(y)$ moduko faktore integratzailea

- Faktore integratzailea existitzeko beharrezko baldintza ondoko moduan sinplifikatzen da:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] = 0.$$

- Eta faktorea existitzen bada honelako adierazpena du:

$$\mu(y) = C\exp\int \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dy$$

Eda 2. gaia

Lehen ordenako ekuazioak
2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y' = f(ax+by+c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

2.11 ariketa

- Eztabaidatu ea $(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$ ekuazioak $\mu(y)$ moduko faktore integratzailea onartzen duen.
- Ekuazio honetarako

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x + 2y, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + y,$$

2.11 ariketa

- Eztabaidatu ea $(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$ ekuazioak $\mu(y)$ moduko faktore integratzailea onartzen duen.
- Ekuazio honetarako

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x + 2y, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + y,$$

dugu, beraz ez da zehatza.
Bestalde

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3xy + y^2}(y - x)\right] \neq 0,$$

eta beraz ez du horrelako faktorerik onartzen.

Eda 2. gaia

Lehen ordenako ekuazioak

2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y' = f(ax + by + c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

1.3 $\mu(x,y) = g(h(x,y))$ moduko faktore integratzailea

- Faktorearen aldagaiekiko menpekotasuna tarteko funtzio baten bidez gerta dadin ondoko baldintza behar da:

$$\mu(h) = C\exp\int \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q\dfrac{\partial h}{\partial x} - P\dfrac{\partial h}{\partial y}}\,dh,$$

h-ren funtzioa soilik

2.12 ariketa

- Ebatzi $(3xy + y^2)dx + (3xy + x^2)dy = 0$ ekuazioa $\mu(x + y)$ moduko faktorea erabiliz.
- Ekuazio honetarako

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x + 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3y + 2x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = x - y.$$

Bestalde, enuntziatuak $h = x + y$ esaten digu, eta orduan

$$Q\frac{\partial h}{\partial x} = 3xy + x^2 \quad P\frac{\partial h}{\partial y} = 3xy + y^2,$$

$$Q\frac{\partial h}{\partial x} - P\frac{\partial h}{\partial y} = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y).$$

Beraz,

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q\dfrac{\partial h}{\partial x} - P\dfrac{\partial h}{\partial y}} = \frac{(x - y)}{(x - y)(x + y)} = \frac{1}{x + y}.$$

Eda 2. gaia

Lehen ordenako ekuazioak
2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y' = f(ax + by + c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

- Orduan, $h = x + y$ gogoratuz,

$$\mu(h) = C\exp \int dh/h = C(x+y)$$

Ondorioz, $(x+y)\left[(3xy+y^2)dx + (3xy+x^2)dy\right] = 0$ ekuazio berria dugu. eta zehatza da, noski:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 8xy + 3x^2 + 3y^2.$$

Ohiko lehenengo pausoak hauxe ematen digu:

$$u(x,y) = \int (x+y)(3xy+y^2)dx + h(y) =$$

$$x^3y + 2x^2y^2 + xy^3 + h(y)$$

Horrek $\partial u/\partial y = x^3 + 4x^2y + 3xy^2 + h'(y)$ ematen digu, baina bestalde $\partial u/\partial y = Q = 4x^2y + x^3 + 3xy^2$, onduan konparazioagatik $h(y) = D$.
Guztira, $u = x^3y + 2x^2y^2 + xy^3 = C$

2.7 Ekuazio linealak

- Lehen ordenako ekuazio linealen itxura orokorra ondokoa da:

$$y' + A(x)y = B(x)$$

- Bi kasu bereizten dira
  - $B = 0$ bada ekuazioa homogeneoa da
  - $B \neq 0$ bada ekuazioa ez homogeneoa da
- Gai honetan ikusitakoaren arabera, ekuazio linealek ondoko faktore integratzailea onartzen dute:

$$\mu(x) = \exp \int A(x)dx.$$

Eda 2. gaia

Lehen ordenako ekuazioak
- 2.1 Esangura geometrikoa
- 2.3 Ekuazio zehatzak
- 2.4 Faktore integratzailea
- 2.5 Ekuazio banangarriak
- 2.6 Faktore integratzaile bereziak
- 2.7 Ekuazio linealak
- 2.8 Transformazio-metodoak
- 2.9 Ekuazio homogeneoak
- 2.10 $y' = f(ax+by+c)$ egiturako ekuazioak
- 2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
- 2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
- 2.13 Riccati-ren ekuazioak
- 2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
- 2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

- Ekuazioa honela geratzen da:

$$e^{\int A(x)}y' + A(x)e^{\int A(x)dx}y = B(x)e^{\int A(x)dx}.$$

- Adierazpen hori beste honen berdina da:

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int A(x)dx}y\right] = B(x)e^{\int A(x)dx},$$

eta azkenik soluzio orokorra hauxe dugu:

$$y = e^{-\int A(x)dx}\left[C + \int B(x)e^{\int A(x)dx}dx\right]$$

- Ekuazio homogeneoaren soluzio orokorra bi soluzioen batuketa da:
homogeneoaren sol. orokorra $(B = 0)$ + inhomogeneoaren sol. partikularra $(C = 0)$

2.13 ariketa

- Ebatzi $xy' + (1 + x)y = e^x$.
- Kasu honetan

$$A = (1 + x)/x = (1/x) + 1, \qquad B = e^x/x.$$

Orduan
$\mu = Ce^{\int A(x)dx} = Ce^{\int((1/x)+1)dx} = Ce^{\ln x+x} = xe^x$
eta

$$y = e^{-\int A(x)dx}\left[C + \int B(x)e^{\int A(x)}dx\right] =$$

$$\frac{1}{x}e^{-x}\left[C + \int \frac{e^x}{x}xe^x dx\right] = \frac{1}{x}e^{-x}\left[C + \int e^{2x}dx\right] =$$

$$\frac{1}{x}e^{-x}\left[C + \frac{e^{2x}}{2}\right] = \frac{1}{x}\left[Ce^{-x} + \frac{e^x}{2}\right]$$

Lehen ordenako ekuazioak
2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y' = f(ax + by + c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

2.14 ariketa

- Banandu aldagaiak $y' + a_1(x)y = 0$ ekuazioa koadratura baten bidez adierazteko. Ondorioztatu hauxe dugula k konstantea denean: $y' - ky = 0 \Leftrightarrow y = Ce^{kx}$.
- Ekuazioa homogeneoa denez, haren soluzio orokorra $y = Ce^{-\int a_1(x)dx}$ dugu, eta $a_1(x) = -k$ bada, orduan $y = Ce^{kx}$.
- Ikus dezagun lehenengo, $y = Ce^{kx} \Rightarrow y' - ky = 0$. Errezki ikusten da $y' = Cke^{kx} = ky$ dugula, beraz frogatuta dago.
  Ikus dezagun orain, $y' - ky = 0 \Rightarrow y = Ce^{kx}$. Argi eta garbi $dy/y = kdx$ dugu, eta orduan $\ln y = kx + \ln C$ edota $y = Ce^{kx}$, beraz frogatuta dago.

2.8 Transformazio-metodoak

- Problema fisikoen ebazpenaren zailtasuna aukeratutako koordenatuen araberekoa da.
- Aukera egokia egiteak lan asko aurrez dezake.
- Kasuaren arabera, komenigarria izango da transformazio-metodoak erabiltzea, menpeko aldagaia, aldagai independentea edo biak batera aldatzea.

Eda 2. gaia

Lehen ordenako ekuazioak
2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y' = f(ax + by + c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

2.9 Ekuazio homogeneoak

- Jakina denez,

$$f(ax, ay) = a^r f(x, y)\ \forall a$$

betetzen duten funtzioak r mailako funtzio homogeneoak dira.

- Ondorioz, $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ ekuazioa r mailako ekuazio funtzio homogeneoa izango da P(x,y) eta Q(x,y) orden bereko funtzio homogeneoak badira:

$$P(ax, ay) = a^r P(x, y), \quad Q(ax, ay) = a^r Q(x, y) \quad \forall a.$$

- Ondoko emaitza froga daiteke:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \text{ homogeneoa da} \Leftrightarrow \quad (1)$$

$$-\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2)$$

- Horren ondorioz, ekuazio homogeneoetarako $u = y/x$ algai-aldaketa oso erabilgarria da:

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xu, \quad y' = u + xu'.$$

- Ezezagun berria ez da aldatzen $(x, y) \to (ax, ay)$ moduko eskala-aldaketekin, ekuazio bera bezala.
- Izan ere, aldagai-aldaketari esker ekuazioa banangarri bihurtzen da:

$$y' = f(u) = u + xu', \quad u' + \frac{1}{x}(u - f(u)) = 0,$$

- Guztira, ekuazioa kuadratura batera laburtzen da:

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Eda 2. gaia

Lehen ordenako ekuazioak
2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y' = f(ax + by + c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

2.16 ariketa

- Ebatzi $(\sqrt{x^2+y^2}+y)dx - xdy = 0$.
- Kasu honetan
$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}$$
eta ikus daiteke homogeneitatea betetzen dela:
$$f\left(ay,ax\right) = \frac{\sqrt{a^2x^2+a^2y^2}+ay}{ax} = f\left(y,x\right),$$
hau da, $f(x,y) = f(y/x)$.
Erabil dezagun, orduan, $u = y/x$ aldaketa:
$$f(u) = \frac{\sqrt{x^2+x^2u^2}+xu}{x} = u + \sqrt{1+u^2}.$$

- Aldaketa horrekin gure ekuazioaren soluzioa adierazten duen koadratura hauxe da:
$$\int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x} + \ln C.$$
Integratuz
$$\text{arcsinh} u = \ln(u+\sqrt{1+u^2}) = \ln x + \ln C,$$
lortzen da, eta azkenik
$$\frac{y}{x} + \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = Cx.$$

Eda 2. gaia

Lehen ordenako ekuazioak
2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y' = f(ax+by+c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

2.10 $y' = f(ax+by+c)$ egiturako ekuazioak

- Honelako ekuazioetan $u = ax + by + c$ aldaketa eginez gero, banangarri bihurtzen dira.
- Ikus dezagun hori, hasteko

$$u = ax + by + c, \quad u' = a + by',$$

eta hasierako hipotesiagatik

$$y' = f(ax + by + c) = f(u)$$

orduan

$$u' = a + bf(u).$$

Guztira, soluzioa kuadratura moduan honela geratzen da:

$$\int \frac{du}{a + bf(u)} = \int dx + C.$$

2.17 ariketa

- Askatu $y' = (x + y + 1)^2$ ekuazioa.
- Kasu honetan $f(x, y) = f(ax + by + c) = (x + y + 1)^2$ eta $a = b = 1$ dugunez,

$$u' = 1 + u^2$$

moduan geratzen da ekuazioa.
Beraz,

$$\int \frac{du}{1 + u^2} = \int dx + C,$$

$$\arctan(x + y + 1) = x + C,$$

eta azkenik

$$y = \tan(x + C) - (x + 1).$$

Eda 2. gaia

Lehen ordenako ekuazioak
2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y' = f(ax + by + c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak

- Bi kasu bereiz daiteke, $ax + by + c = 0$ eta $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ zuzenen arteko erlazio geometrikoaren arabera.

1. kasua $\alpha/a = \beta/b = k$ (zuzen paraleloak)

- Kasu honetan ondokoa dugu:

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{k(ax + by) + c}\right),$$

  eta aurreko atalean aztertutako kasu bera dugu, hau da, $f(x, y) = f(ax + by + c)$.

- Beraz, $u = ax + by$ edo $u = ax + by + c$ moduko aldaketak egiteak komeni du, eta horrekin $u' = a + bf(u)$ lortzen da.

2.18 ariketa

- Ebatzi $y' = (x - y)/(x - y - 1)$ ekuazioa.
- Ekuazio honetarako $a = 1$, $b = -1$ eta $u = x - y$. Orduan $u' = 1 - u/(u - 1) = -1/(u - 1)$, eta guztira

$$\int (u - 1)du = -\int dx + C,$$

$$\frac{u^2}{2} - u = -x + C,$$

$$\frac{(x - y)^2}{2} - (x - y) - C = -x,$$

$$(x - y)^2 + 2y = 2C.$$

Eda 2. gaia

Lehen ordenako ekuazioak
2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y' = f(ax + by + c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak

- Gogoratu bi kasu genuela.

2. kasua $\alpha/a = \beta/b \neq k$ (zuzen ez paraleloak)

- Jo dezagun (x_0, y_0) dela zuzenen ebakitze-puntua: $ax_0 + by_0 + c = \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0$.
- Kasu honetan, komeni du $u = x - x_0$ eta $v = y - y_0$ aldagai berriak definitzea. Ikus dezagun zergatik:

$$ax + by + c = ax + by + c - (ax_0 + by_0 + c) = au + bv,$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma = \alpha x + \beta y + \gamma - (\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma) = \alpha u + \beta v.$$

- Aldagai hauetarako $dy/dx = dv/dx = dv/du$ betetzen da eta ekuazioa homogeneo bihurtzen dute:

$$\frac{dv}{du} = f(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}) = f(\frac{au + bv}{\alpha u + \beta v}) = f(\frac{a + bv/u}{\alpha + \beta v/u}).$$

- Orduan, jatorrizko ekuazioa

$$\frac{dv}{du} = f(\frac{a + bv/u}{\alpha + \beta v/u}).$$

moduko ekuazio homogeneoa bihurtu da.
- Jakina denez, $z = v/u$ aldaketak banangarri bihurtzen du ekuazioa.
- Orain komeni du notazioa simplifikatzeak eta u-rekiko deribatuak $'$ ikurraz adieraztea ere, orduan

$$\frac{dv}{du} = v' \quad \text{eta} \quad \frac{dz}{du} = z'$$

jarriko dugu.
- Horrela,

$$v' = z'u + z$$

izango dugu, eta azkenik

$$z'u + z = f(\frac{a + bz}{\alpha + \beta z}).$$

Eda 2. gaia

Lehen ordenako ekuazioak
2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y' = f(ax + by + c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

2.19 ariketa

- Ebatzi honako ekuazio hau:

$$y' = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}.$$

- Ebakitze puntua $x_0 - y_0 + 1 = x_0 + y_0 - 3 = 0$ berdintzatik lortzen da: $(x_0, y_0) = (1, 2)$.
Hori kontuan hartuz, $u = x - 1$, $v = y - 2$ aldagai berriak erabiliko ditugu eta horiekin

$$y' = \frac{u + 1 - (v + 2) + 1}{u + 1 + v + 2 - 3} = \frac{u - v}{u + v}$$

lortzen da.
Beraz,

$$\frac{dv}{du} = \frac{1 - v/u}{1 + v/u}$$

- Lehen azaldutakoa gogoratuz ondokoa izango dugu gure kasuan

$$v' = z + z'u = (1 - z)/(1 + z).$$

Horrela,

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{u}\left(\frac{1 - z}{1 + z} - z\right) = \frac{1}{u}\left(\frac{1 - 2z - z^2}{1 + z}\right),$$

eta

$$\int \frac{1 + z}{1 - 2z - z^2} dz = \int \frac{du}{u} + \ln C,$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1 - 2z - z^2| = \ln C|u|, \quad z^2 + 2z - 1 = \frac{1}{C^2u^2}.$$

Aldaketak deseginez

$$\left(\frac{v}{u}\right)^2 + 2\left(\frac{v}{u}\right) - 1 = \frac{1}{C^2u^2},$$

$$\left(\frac{y - 2}{x - 1}\right)^2 + 2\left(\frac{y - 2}{x - 1}\right) - 1 = \frac{1}{C^2(x - 1)^2},$$

$$y^2 + 2xy - 6y - x^2 - 2x = D^2.$$

Eda 2. gaia

Lehen ordenako ekuazioak
2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y' = f(ax + by + c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

2.12 Bernouilli-ren ekuazioak

- Ekuazio hauen itxura hauxe da:

$$y' + A(x)y = B(x)y^n \quad n \neq 0, 1.$$

  - $n = 0$ bada ekuazioa lineal ez homogeneoa da
  - $n = 1$ bada ekuazioa, lineal homogeneoa da
- Ekuazioa linealizatzen da $u = y^{1-n}$ aldaketa eginez. Hasteko ondokoa dugu:

$$u' = (1-n)y^{-n}y'.$$

Orain, ordezka dezagun emaitza hori jatorrizko ekuazioan:

$$\frac{u'y^n}{(1-n)} + A(x)y = B(x)y^n, \; \frac{u'}{(1-n)} + A(x)y^{1-n} = B(x),$$

Eta azkenik ekuazio lineal bat lortzen dugu:

$$u' + (1-n)A(x)u = (1-n)B(x).$$

2.20 ariketa

- Askatu hurrengo ekuazioa:

$$y' - y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

- Hau Bernouilliren ekuazioa dugu, $n = 2$ indizekoa. Orduan $u = y^{-1}$ aldaketa eginez ondoko ekuazio lineala lortzen dugu:

$$u' + (1-2)(-\cos x)u = (1-2)\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right).$$

Haren soluzio orokorra hauxe da:

$$u = e^{-\int \cos x dx}\left(C - \int \frac{1}{2}\sin 2x \, e^{\int \cos x dx}\right) =$$

$$u = e^{-\sin x}\left(C - \int \sin x \, \cos x \, e^{\sin x}\right) =$$

$$u = e^{-\sin x}\left(C - (\sin x - 1)e^{\sin x}\right) = Ce^{-\sin x} + 1 - \sin x.$$

Beraz, azkenik

$$y = \left(Ce^{-\sin x} + 1 - \sin x\right)^{-1}.$$

Eda 2. gaia

Lehen ordenako ekuazioak
2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y' = f(ax + by + c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

2.13 Riccatti-ren ekuazioak

- Halako ekuazioen itxura hauxe da:

$$y' + A(x)y + B(x)y^2 = C(x)\ B, C \neq 0.$$

$B = 0$ bada, ekuazioa lineal ez homogeneoa da
$C = 0$ bada, Bernouilli-ren ekuazioa da

- Ez dago ebazpen-metodo orokorrik.
- Baina $y_1(x)$ soluzio partikular bat ezagutzen bada, $u = y - y_1$ aldagai-aldaketak jatorrizko ekuazioa Bernouilli-ren ekuazio bat bihurtzen da:

$$u' + (A(x) + 2B(x)y_1(x))u + B(x)u^2 = 0.$$

- Froga dezagun Bernouilli-ren eta Ricatti-ren ekuazioen arteko erlazioa.
- Gure abiapuntua $y = u + y_1$ dugu. Orduan

$$y' = u' + y_1'.$$

- Ekuazioan ordezkatuz ondokoa dugu:

$$(u' + y_1') + A(u + y_1) + B(u + y_1)^2 = C.$$

- Hori garatuz eta ordenatuz ondokoa lortzen da:

$$u' + Au + 2Buy_1 + Bu^2 + y_1' + Ay_1 + By_1^2 = C.$$

- Baina y_1 soluzio partikularra denez $y_1' + Ay_1 + By_1^2 = C$ betetzen da, eta beraz

$$u' + Au + 2Buy_1 + Bu^2 = 0$$

Eda 2. gaia

Lehen ordenako ekuazioak
2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y' = f(ax + by + c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

2.21 ariketa

- Egiaztatu $y = 1/x$ funtzioa

$$y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$$

ekuazioaren soluzioa dela eta erabili emaitza soluzio orokorra aurkitzeko.

- $y_1 = 1/x$ badugu, orduan argi eta garbi $y_1' = -1/x^2$ eta ordezkatuz

$$y_1' = -1/x^2 = y_1^2 - 2/x^2 = 1/x^2 - 2/x^2$$

ikusten dugu ekuazioa betetzen dela.

- Soluzio partikularrak $u = y - 1/x$ aldagai-aldaketa gomendatzen du, eta $A = 0$, $B = -1$ eta $C = -2/x^2$ dugunez ebatzi behar dugun ekuazio berria hauxe da:

$$u' - \frac{2}{x}u - u^2 = 0.$$

- Hura Bernoulliren ekuazioa da $n = 2$, $A = -2/x$, eta $B = 1$ aukera egiten bada, eta $v = u^{-1}$ definitzea omendagarria da.
Horrela, ekuazioa modu linealean geratzen da:

$$v' - (-2/x)\,v = -1.$$

Haren soluzio orokorra hauxe dugu:

$$v = e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left[C - \int e^{\int \frac{2}{x}dx}dx\right] =$$

$$e^{-2\log x}\left[C - \int x^2 dx\right] = \frac{1}{x^2}\left[C - \frac{x^3}{3}\right] = \frac{C}{x^2} - \frac{x}{3}.$$

- Azken aldaketa deseginez hauxe ondorioztatzen dugu:

$$1/u = (3C - x^3)/(3x^2),$$

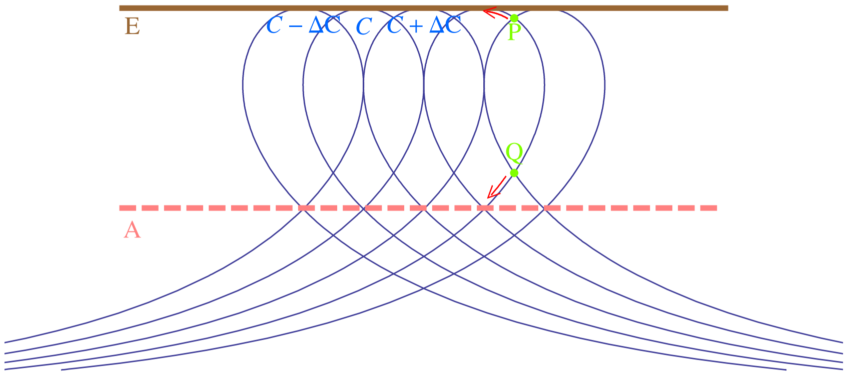
eta aurrekoa deseginez bilatutako emaitza lortzen dugu azkenik:

$$y = u + \frac{1}{x} = \frac{3x^2}{3C - x^3} + \frac{1}{x} = \frac{2x^3 + 3C}{x(3C - x^3)}.$$

Eda 2. gaia
Lehen ordenako ekuazioak
2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y' = f(ax + by + c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak

- Kontzeptu geometrik interesgarri bat ikus dezagun ondoko irudia kontsideratuz:



2.4. IRUDIA Kurba sorta baten inguratzailea eta puntu anizkoitzak.

  - Irudiko kurba-sortaren ekuazioa $\varphi(x, y, C) = 0$ dugu. Baina sortan ez dagoen E kurbak puntu bakoitzean kurba-sortako kurba baten ukitzailea da, eta inguratzaile deritzo.
    Hori dela eta, E kurbak betetzen du kurba-familiak betetzen duen ekuazio diferentzial berbera: $F(x, y, y') = 0$.

- Inguratzailearen ekuazioa kalkulatzeko erabili behar dugu, kurba-sortako bi kurbetan dagoen P puntua.
  Puntu horrek $\varphi(x, y, C) = 0$ eta $\varphi(x, y, C + \Delta C) = 0$ ekuazioak betetzen ditu, baina baita ere haien ondoko konbinazioa:

$$\varphi(x, y, C) = 0 \ \text{ eta } \ \frac{\varphi(x, y, C + \Delta C) - \varphi(x, y, C)}{\Delta C} = 0.$$

  - Baina $\Delta C \to 0$ limitean betetzen diren ekuazioak ondokoak dira:

$$\varphi(x, y, C) = 0 \ \text{ eta } \ \frac{\partial\varphi(x, y, C)}{\partial C} = 0.$$

  - Azken bi ekuazio horiek konbinatuz inguratzailearen ekuazioa lortzen da.

Eda 2. gaia
Lehen ordenako ekuazioak
2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y' = f(ax + by + c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y' = f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

2.22 ariketa

- Aurkitu $(x-a)^2+y^2=1$ sortaren inguratzaileak.
- Erabili behar ditugun ekauzioak dira

$$\varphi(x,y,a)=(x-a)^2+y^2-1=0$$

eta

$$\frac{\partial\varphi(x,y,a)}{\partial a}=\frac{\partial((x-a)^2+y^2-1)}{\partial a}=0.$$

Bigarren ekuazioa honela geratzen da:

$$2(a-x)=0,$$

hau da, $x=a$ dugu.
Emaitza hori ekuazio finituarekin adostatuz, hau da,

$$(x-a)^2+y^2=(a-a)^2+y^2=0^2+y^2=1,$$

eginez, ondorioztatzen dugu inguratzaileen ekuazioa ondokoa dela:

$$y=\pm 1.$$

2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

- Batzutan, ekuazio diferentzial baten soluzioa aurkitzeko modurik errezena ekuazioa deribatzea da.
- Ekuazio berriaren ordena altuagoa denez, soluzio gehiago izango ditu eta horien artean jatorrizko soluzioa izango da.

Adibidea: Kepler-en problema

- Mekanikak dioenez, partikula bat $V=-k/r$ potentzial newtondarrean higitzen denean, ondoko ekuazioak deskribatzen duela $u\equiv 1/r$ magnitudearen ϕ posizio angeluarrarekiko menpekotasuna ($'\equiv d/d\phi$):

$$(u')^2+u^2-\frac{2\epsilon}{p}u=\frac{e^2-1}{p^2}.$$

- Kontuan izan behar dugu $\epsilon=k/|k|$ eta orduan $\epsilon^2=1$.

Lehen ordenako ekuazioak
2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y'=f(ax+by+c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y'=f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa

- Ekuazioa deribatuz ondokoa lortzen da (osziladore harmoniko bortzatua):

$$2u'\left(u''+u-2\epsilon/p\right)=0.$$

Haren soluzioa $u=C\cos(\phi-\phi_0)+\epsilon/p$ dugu. Gehiegizko parametro bat dugunez, bietako bat finkatu behar da hasierako soluzioa erabiliz:

$$0=(u')^2+u^2-\frac{2\epsilon}{p}u-\frac{e^2-1}{p^2}=$$

$$C^2(\sin(\phi-\phi_0))^2+(C\cos(\phi-\phi_0)+\frac{\epsilon}{p})^2-$$

$$\frac{2\epsilon}{p}(C\cos(\phi-\phi_0)+\frac{\epsilon}{p})-\frac{e^2-1}{p^2}=$$

$$C^2-\frac{\epsilon^2}{p^2}-\frac{e^2-1}{p^2}$$

.

- Guztira, $C=e/p$ ondorioztatzen dugu.

2.52 ariketa

- Ebatzi $(y')^2+2y=1$ ekuazioa.
- Deribatuz eta ordenatuz $2y'(y''+1)=0$ lortzen dugu, orduan, $y=D$ aukera dugu edo baita ere $y''=-1$. Argi eta garbi $y'=-\int dx$ eta $y=\int(-\int dx)dx$, beraz,

$$y'=-x+C\ \text{ eta } y=-\frac{x^2}{2}+Cx+D.$$

Ikusten dugu bidean utzitako soluzioa barnean dagoela, baina falta zaigu aurreko emaitza hasierako ekuazioarekin bateratzea.
Ondokoa dugu:

$$0=(-x+C)^2+2(-\frac{x^2}{2}+Cx+D)-1=$$

$$x^2-2Cx+C^2-x^2+2C^2x+2D-1.$$

Orduan, $D=(1-C^2)/2$ aukeratu behar da eta horrek ematen digu bilatutako soluzioa.

Eda 2. gaia

Lehen ordenako ekuazioak
2.1 Esangura geometrikoa
2.3 Ekuazio zehatzak
2.4 Faktore integratzailea
2.5 Ekuazio banangarriak
2.6 Faktore integratzaile bereziak
2.7 Ekuazio linealak
2.8 Transformazio-metodoak
2.9 Ekuazio homogeneoak
2.10 $y'=f(ax+by+c)$ egiturako ekuazioak
2.11 $y'=f(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma})$ egiturako ekuazioak
2.12 Bernouilli-ren ekuazioak
2.13 Riccati-ren ekuazioak
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak: deribazio-metodoa