



# Elementos de Teoría de Grupos para estudiantes de Física

Martín Rivas

e-mail:martin.rivas@ehu.es

Departamento de Física Teórica

UPV/EHU

Leioa, Octubre 2005

© Martín Rivas, Bilbao.



# Índice general

<b>1. GRUPOS FINITOS</b>	<b>3</b>
1.1. Definiciones y propiedades generales . . . . .	3
1.2. Grupo Simétrico $S_n$ . . . . .	5
1.3. Grupo diédrico $D_n$ . . . . .	7
1.4. Aplicaciones entre grupos . . . . .	8
1.5. Representación de un grupo . . . . .	9
1.5.1. Otras representaciones . . . . .	11
1.6. Producto Kronecker de representaciones . . . . .	12
1.7. Objetivos de la teoría de representaciones . . . . .	13
1.8. Resumen de notación y principales teoremas . . . . .	15
1.8.1. Notación general . . . . .	15
1.8.2. Teoremas generales sobre grupos finitos . . . . .	15
1.8.3. Teoremas generales sobre representaciones de grupos finitos . . . . .	16
1.8.4. Relaciones de ortogonalidad . . . . .	17
1.9. Algunos grupos finitos de orden más bajo . . . . .	17
1.10. Representaciones irreducibles fieles de $S_3$ , $D_4$ , $Q$ , $G_{12}$ y $D_6$ . . . . .	25
1.11. Representaciones irreducibles fieles de los grupos $T$ y $S_4$ . . . . .	27
1.12. Representación irreducible fiel del grupo Octaédrico $O$ . . . . .	29
1.13. Problemas . . . . .	31
<b>2. GRUPOS CONTINUOS</b>	<b>63</b>
2.1. Grupos de Lie . . . . .	63
2.2. Grupos de Lie de transformaciones . . . . .	68
2.3. Álgebras de Lie . . . . .	72
2.3.1. Álgebra de Lie de un grupo de Lie . . . . .	73
2.3.2. Representación adjunta de un álgebra de Lie . . . . .	74
2.3.3. Teorema (Cartan-Levi-Maltsev) . . . . .	75
2.3.4. Algunas álgebras de Lie de dimensión baja . . . . .	76
2.3.5. Álgebra de Lie de un grupo de Lie de transformaciones . . . . .	77
2.3.6. Cambios de coordenadas . . . . .	80
2.3.7. Realización adjunta de un álgebra de Lie . . . . .	81
2.4. Grupos de Lie de transformaciones lineales . . . . .	82
2.5. Espacio homogéneo de un grupo . . . . .	84
2.6. Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias . . . . .	84
2.6.1. Integrales primeras . . . . .	87
2.7. Aplicación exponencial . . . . .	88
2.8. Problemas . . . . .	90

<b>3. TENSORES</b>	<b>113</b>
3.1. Derivación en variedades . . . . .	113
3.2. Espacio vectorial tangente y cotangente . . . . .	115
3.3. Tensores . . . . .	116
3.4. Transformación de un tensor. Covariancia y contravariancia . . . . .	117
3.5. Sobre la notación vectorial y tensorial . . . . .	119
3.6. Operaciones con tensores . . . . .	120
3.7. Derivada de Lie . . . . .	121
3.7.1. Derivada de Lie de una función . . . . .	122
3.7.2. Derivada de Lie de un campo vectorial contravariante . . . . .	123
3.7.3. Propiedades de la derivada de Lie de un campo vectorial . . . . .	124
3.7.4. Derivada de Lie de un campo vectorial covariante . . . . .	125
3.7.5. Derivada de Lie de un campo de tensores . . . . .	125
3.7.6. Vectores de Killing . . . . .	127
3.8. Derivada covariante . . . . .	129
3.8.1. Derivada covariante a lo largo de una curva . . . . .	131
3.8.2. Conexiones en variedades métricas . . . . .	132
3.9. Integración en variedades . . . . .	134
3.9.1. Elemento de arco, de superficie, de volumen . . . . .	134
3.9.2. Transformación del elemento de línea, superficie y volumen . . . . .	135
3.10. Derivada material . . . . .	136
3.10.1. Campo de aceleración . . . . .	137
3.10.2. Variación temporal del elemento de línea, superficie y volumen . . . . .	137
3.10.3. Derivada material de integrales curvilíneas . . . . .	138
3.10.4. Derivada material de integrales de superficie . . . . .	138
3.10.5. Derivada material de integrales de volumen . . . . .	139
3.11. Problemas . . . . .	140
<b>4. GRUPO DE ROTACIONES</b>	<b>143</b>
4.1. Grupo $O(3)$ . . . . .	143
4.2. Rotaciones. Grupo $SO(3)$ . . . . .	144
4.3. Parametrización normal o canónica del grupo $SO(3)$ . . . . .	146
4.4. Álgebra de Lie del grupo de rotaciones . . . . .	148
4.5. Ley de composición de las rotaciones . . . . .	149
4.6. Grupo $SU(2)$ . . . . .	153
4.7. Problemas . . . . .	155
<b>5. GRUPOS CINEMÁTICOS</b>	<b>169</b>
5.1. Principio de Relatividad Especial . . . . .	169
5.2. Grupos Cinemáticos . . . . .	171
5.2.1. Análisis dimensional . . . . .	175
5.3. Algunos grupos cinemáticos . . . . .	177
5.3.1. Grupo de Carroll . . . . .	177
5.3.2. Grupos de Newton . . . . .	178
5.3.3. Grupo de Galileo . . . . .	180
5.3.4. Grupo de Poincaré . . . . .	180
5.3.5. Grupo de Lorentz . . . . .	183
5.3.6. Grupo $SL(2, \mathbb{C})$ . . . . .	186
5.3.7. Grupo de De Sitter $SO(4,1)$ . . . . .	189
5.4. Representación matricial $5 \times 5$ de los generadores . . . . .	191
5.5. Interpretación física de las transformaciones . . . . .	194

5.6.	Contracciones de grupos . . . . .	195
5.7.	Contracción de los grupos cinemáticos . . . . .	197
5.8.	Relación entre los grupos cinemáticos . . . . .	198
5.9.	Problemas . . . . .	200
<b>6.</b>	<b>INVARIANTES DE UN GRUPO DE LIE</b>	<b>219</b>
6.1.	Acción adjunta . . . . .	219
6.2.	Invariantes de un grupo de Lie . . . . .	220
6.2.1.	Invariantes polinómicos . . . . .	221
6.2.2.	Invariantes racionales . . . . .	223
6.3.	Operadores de Casimir de grupos de Lie semisimples . . . . .	224
6.4.	Operadores de Casimir de algunos grupos cinemáticos . . . . .	226
6.4.1.	Operadores de Casimir de los grupos Euclídeo y de Aristóteles . . . . .	226
6.4.2.	Operadores de Casimir del Grupo de Lorentz . . . . .	228
6.4.3.	Operadores de Casimir del Grupo de Galileo . . . . .	228
6.4.4.	Operadores de Casimir del Grupo de Galileo extendido . . . . .	229
6.4.5.	Operadores de Casimir del Grupo de Poincaré . . . . .	230
6.4.6.	Operadores de Casimir del grupo de De Sitter $SO(4,1)$ . . . . .	230
6.4.7.	Operadores de Casimir del grupo de anti-De Sitter $SO(3,2)$ . . . . .	231
6.4.8.	Consideraciones cinemáticas sobre la densidad del universo . . . . .	232
6.5.	Sistemas Elementales Cuánticos . . . . .	234
6.6.	Sistemas Elementales Clásicos . . . . .	235
6.6.1.	Sistemas Elementales Lagrangianos . . . . .	238
6.7.	Problemas . . . . .	240
<b>7.</b>	<b>ESPINORES</b>	<b>255</b>
7.1.	Espinores . . . . .	255
7.2.	Representación espinorial producto Kronecker . . . . .	256
7.3.	Representaciones irreducibles del grupo de Rotaciones . . . . .	261
7.4.	Representaciones irreducibles del grupo $SO(4)$ . . . . .	263
7.5.	Representaciones irreducibles del grupo de Lorentz . . . . .	264
7.6.	Armónicos esféricos . . . . .	265
7.7.	Representación espinorial sobre $SO(3)$ . . . . .	267
7.8.	Teorema de Peter-Weyl sobre grupos compactos . . . . .	273
7.9.	Problemas . . . . .	277
<b>8.</b>	<b>SIMETRÍAS</b>	<b>281</b>
8.1.	Simetrías de ecuaciones diferenciales . . . . .	281
8.1.1.	Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales . . . . .	287
8.2.	Simetrías de un sistema clásico . . . . .	288
8.3.	Teorema de Noether . . . . .	293
8.4.	Introducción al formalismo cuántico . . . . .	296
8.4.1.	Espacio de Hilbert . . . . .	297
8.4.2.	Operadores y formas lineales sobre un espacio de Hilbert . . . . .	299
8.4.3.	Tipos de operadores lineales . . . . .	300
8.4.4.	Valores propios y vectores propios . . . . .	301
8.4.5.	Principio de Incertidumbre . . . . .	301
8.5.	Simetrías de un sistema cuántico . . . . .	303
8.6.	Representaciones irreducibles de un grupo . . . . .	305
8.7.	Representaciones proyectivas de grupos continuos . . . . .	305
8.7.1.	Extensión central del grupo $SO(3)$ . . . . .	307

8.7.2.	Extensión central del grupo Euclídeo . . . . .	308
8.7.3.	Extensión central del grupo de Galileo . . . . .	309
8.7.4.	Extensión central del grupo de Poincaré . . . . .	310
8.8.	El Principio de Relatividad como simetría de un sistema . . . . .	311
8.8.1.	Observables y valores esperados . . . . .	311
8.8.2.	Inversiones . . . . .	312
8.9.	Problemas . . . . .	314
<b>A.</b>	<b>FUNCIONES DE MATRICES</b>	<b>321</b>
A.1.	Funciones de una matriz . . . . .	321
A.1.1.	Norma de una matriz . . . . .	321
A.1.2.	Exponencial de una matriz . . . . .	322
A.1.3.	Logaritmo de una matriz . . . . .	322
A.1.4.	Algunos teoremas útiles . . . . .	322
A.1.5.	Teorema de Cayley-Hamilton . . . . .	324
<b>B.</b>	<b>EXPONENTES Y FUNCIONES GAUGE</b>	<b>327</b>
B.1.	Exponentes de un grupo . . . . .	327
B.2.	Definición y propiedades . . . . .	328
B.3.	Principales teoremas sobre exponentes . . . . .	329
B.4.	Funciones gauge . . . . .	330
B.5.	Propiedades de las funciones gauge . . . . .	331
<b>C.</b>	<b>ALGEBRAS DE LIE SEMISIMPLES</b>	<b>335</b>
C.1.	Algebras de Lie semisimples. Forma canónica . . . . .	335
C.2.	Grupo $SU(3)$ . . . . .	337
<b>D.</b>	<b>GRUPO CONFORME</b>	<b>343</b>
D.1.	Transformaciones Conformes . . . . .	343
D.2.	Grupo Conforme del espacio de Minkowski . . . . .	345
D.3.	Operadores de Casimir del grupo Conforme $SO(4,2)$ . . . . .	351
<b>E.</b>	<b>ÁLGEBRA GEOMÉTRICA</b>	<b>353</b>
E.1.	Los números complejos . . . . .	355
E.2.	Los cuaterniones . . . . .	355
E.3.	Álgebra de Pauli . . . . .	356
E.3.1.	Base ortonormal . . . . .	357
E.3.2.	Rotaciones . . . . .	357
E.3.3.	Producto geométrico en $\mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$ . . . . .	358
E.4.	Álgebra de Dirac . . . . .	360
E.4.1.	Representación de Majorana . . . . .	361
<b>F.</b>	<b>ENSEÑANDO ÁLGEBRA AL ORDENADOR</b>	<b>363</b>
F.1.	Álgebras no conmutativas . . . . .	363
<b>G.</b>	<b>EL HELIOSCIÁMETRO DE LEIOA</b>	<b>365</b>
<b>H.</b>	<b>SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS</b>	<b>369</b>
	Índice de referencias biográficas	371